

1. Naloga. Obvezna

Dani sta funkciji s predpisom

$$f(x) = \cos(2x) + a \quad \text{in} \quad g(x) = b\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad b > 0.$$

1.1. Zapišite definicijski območji in zaloge vrednosti funkcij f in g . (3 točke)

1.2. Določite vrednost parametrov a in b tako, da bosta imeli funkciji f in g presečišči pri $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{\pi}{4}$. (4 točke)

1.3. Naj bo $a = 0$ in $b = \frac{16}{\pi^2}$. Izračunajte ploščino območja med grafoma funkcij f in g med presečiščema. (6 točk)

Rešitve:

1.1. $f(x) = \cos(2x) + a$

$$D_f: x \in (-\infty, +\infty)$$

$$Z_f: y \in [a-1; a+1]$$

$$g(x) = b\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$D_g: x \in (-\infty, +\infty)$$

$$Z_g: y \in [0, +\infty)$$

1.2.

$$\cos(2x) + a = b \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$x_1 = 0$$

$$\cos(2 \cdot 0) + a = b \left(0 - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\cos 0 + a = b \cdot \frac{\pi^2}{16}$$

$$1 + a = b \frac{\pi^2}{16}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + a = b \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\cos \frac{\pi}{2} + a = b \cdot 0$$

$$0 + a = 0$$

1.3.

$$a = 0$$

$$1 + 0 = b \frac{\pi^2}{16}$$

$$b = \frac{16}{\pi^2}$$

$$f(x) = \cos(2x)$$

$$g(x) = \frac{16}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0,11$$

$$S = \int_0^{\pi/4} \left[\cos(2x) - \frac{16}{\pi^2} \left(x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{16}\right) \right] dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\cos(2x) - \frac{16}{\pi^2} x^2 + \frac{8}{\pi} x - 1 \right] dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{16}{\pi^2} \frac{x^3}{3} + \frac{8}{\pi} \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$\int \cos(2x) dx = \int \cos(u) \frac{1}{2} du =$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = u \\ (2x)' dx = du \\ 2 dx = du \end{array} \right| \begin{array}{l} = \frac{1}{2} \sin(u) + C \\ = \frac{1}{2} \sin(2x) + C \end{array}$$

$$dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{16}{3\pi^2} x^3 + \frac{4}{\pi} x^2 - x \right) \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{16}{3\pi^2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi}{4} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} \sin(2 \cdot 0) - \frac{16}{3\pi^2} \cdot 0^3 + \frac{4}{\pi} \cdot 0^2 - 0 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{16}{3\pi^2} \cdot \frac{\pi^3}{64} + \frac{4}{\pi} \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} \right) - (0) =$$

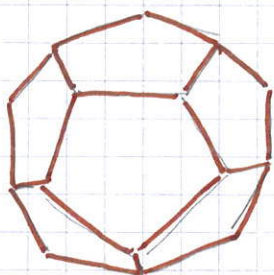
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{3\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 \pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12}$$

$$P = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12}$$

2. Naloga Obvezna

Dodekaeder je pravilni polieder, omejen z 12 pravilnimi petkotniki. Na vsako ploskev napišemo po eno izmed števil od 1 do 12, ki se ne ponavljajo.



2.1. trikrat za kotalimo dra oštevilčena dodekaedra. kolikšna je verjetnost dogodka

A, da je vsota števil na obeh zgornjih ploskvah praštevilo, manjše ali enako 5? (4 točke)

2.2. En oštevilčeni dodekaeder zakotalimo 20-krat. kolikšna je verjetnost dogodka B, da se bo v teh 20 ponovitvah poskusa število 7 pojavilo na zgornji ploskvi natanko 3-krat? Rezultat zaokrožite na 3 decimalna mesta. (4 točke)

2.3. Naj bo dolžina roba dodekaedra enaka $a = 6$ cm. Izračunajte vsoto dolžin vseh robov in površino tega dodekaedra. (6 točk)

rešitve:

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$5 = 1 + 4$$

$$5 = 2 + 3$$

$$5 = 3 + 2$$

$$5 = 4 + 1$$

$$m = 2$$

$$n = 12 \cdot 12$$

$$h = 144$$

$$2.1. \quad \boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{144} = 0,0486}$$

$$2.2. \quad n = 20 ; \quad k = 3$$

$$p = \frac{1}{12} ; \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

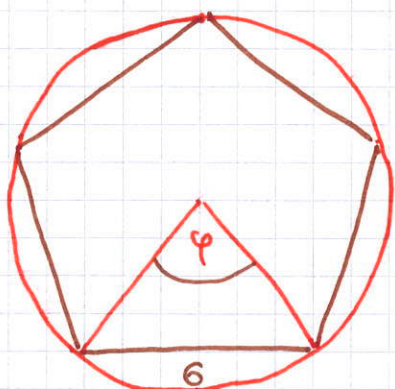
$$P(B) = \binom{n}{k} p^{n-k} \cdot q^k = \binom{20}{3} \left(\frac{1}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{20-3}$$

$$\boxed{P(B) = 1140 \cdot \frac{1}{12^3} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{17} = 0,150}$$

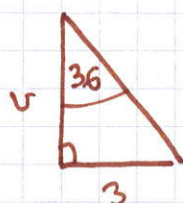
2.3. Dodekaeder ima 12 ploskev
in 30 robov.

$$L = 30 \cdot a = 30 \cdot 6$$

$$\boxed{L = 180 \text{ cm}}$$



$$\varphi = \frac{360}{5} = 72^\circ$$



$$\tan 36 = \frac{3}{v}$$

$$v = \frac{3}{\tan 36}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot v = \frac{1}{2} 6 \cdot \frac{3}{\tan 36} = \frac{9}{\tan 36}$$

$$\boxed{P_{\text{dodek.}} = 5 \cdot P_{\Delta} \cdot 12 = 5 \cdot \frac{9}{\tan 36} \cdot 12 = 743 \text{ cm}^2}$$

3. Naloga . . Izbirna

Naj bo $\{a_n\}$ geometrijsko zaporedje s kvociantom $q = e^2$ in prvim členom $a_1 = 1$. Naj bo dano še zaporedje s splošnim členom $b_n = \ln(a_n)$.

3.1. Zapišite splošni člen zaporedja $\{a_n\}$ in dokažite, da je zaporedje $\{b_n\}$ aritmetično z diferenco $d=2$.
(4 točke)

3.2. Izračunajte vsoto prvih 100 členov zaporedja $\{b_n\}$. (2 točki)

3.3. Dokažite, da za poljubni par naravnih števil m, n velja da b_m in b_n nista tuji števili.
(3 točke)

3.4. Naj bo za vsako naravno število n p_n polinom, definiran s predpisom

$$p_n(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots + b_{n+1} x^n.$$

(4 točke)

Dokažite, da ima za vsako naravno število n polinom na intervalu $[0, \infty)$ natanko eno ničlo.

Rešitve:

$$3.1. \quad a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} = 1 \cdot (e^2)^{n-1} = e^{2n-2}$$

$$a_n = \frac{e^{2n}}{e^2}$$

$$b_n = \ln(a_n) = \ln e^{(2n-2)} =$$

$$b_n = (2n-2) \cdot \ln e = (2n-2) \cdot 1$$

$$b_n = 2n-2$$

$$b_1 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) - 2 = 2n+2-2$$

$$b_{n+1} = 2n$$

$$d = b_{n+1} - b_n = 2n - (2n-2) = 2$$

$$d = 2$$

$$3.2. \quad S_n = \frac{n}{2} (2b_1 + (n-1)d)$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} (2 \cdot 0 + (100-1)2)$$

$$S_{100} = 9900$$

3.3. Dve celi števili a in b sta tuji če imata največji skupni delitelj enak 1. $D(a, b) = 1$

Števili b_m in b_n nista tuji zato ker sta sodi tako da je je 2 skupni delitelj.

$$b_m = 2m - 2 \quad ; \quad b_n = 2n - 2$$

$$b_m = 2(m-1) \quad b_n = 2(n-1)$$

$$2 \mid b_m$$

$$2 \mid b_n$$

$$3.4. \quad b_n = 2(n-1)$$

b_n je pozitivno za vse $n > 1$.

$$p_n(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + \dots + b_{n+1} x^n$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 2 \quad p_1(x) = 0 + 2x = 2x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$b_3 = 4 \quad p_2(x) = 0 + 2x + 4x^2 = 2x(1 + 2x)$$

$$b_4 = 6 \quad p_3(x) = 0 + 2x + 4x^2 + 6x^3 = \\ = 2x(1 + 2x + 3x^2)$$

$$b_5 = 8 \quad p_4(x) = 0 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 = \\ = 2x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)$$

Če pred oklepaj izpostavimo $2x$, dobimo

v oklepaju polinome ki imajo vse

pozitivne koeficiente. Polinomi ki

imajo vse koeficiente pozitivne, lahko

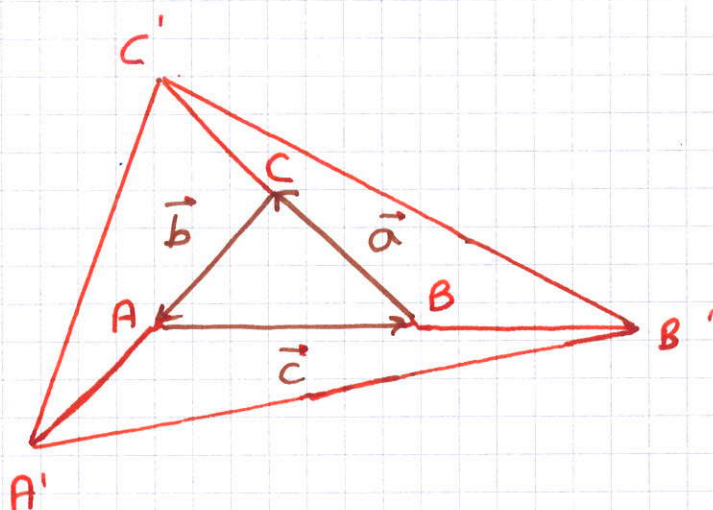
imajo samo negativne ~~pol~~ ničle.

Zato ~~po~~ vedno na intervalu $x \in [0, \infty)$

samo ena ničla $x = 0$

4. Naloga . Izbirna naloga

V trikotniku ABC naj bo $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$ in $\vec{c} = \vec{AB}$. Točke A' , B' in C' konstruiramo tako da je $\vec{AB'} = 2\vec{AB}$; $\vec{BC'} = 2\vec{BC}$ in $\vec{CA'} = 2\vec{CA}$.



4.1. Izrazite vektorje $\vec{A'B'}$, $\vec{B'C'}$ in $\vec{C'A'}$ kot linearne kombinacije vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. (3 točke)

4.2. Izračunajte ploščino in obseg trikotnika $B'BC'$, če je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ in kot $CB B'$ meri 133° . Rezultata zapišite na 4 mesta natančno. (7 točk)

4.3. V kakšnem razmerju sta ploščini trikotnikov ABC in $A'B'C'$? (3 točke)

Rešitev:

$$4.1. \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'} = -\overline{b} + 2\overline{c}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC'} = -\overline{c} + 2\overline{a}$$

$$\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CA'} = -\overline{a} + 2\overline{b}$$

$$4.2. \quad |\overline{BB'}| = |\overline{c}| = 3$$

$$|\overline{BC'}| = 2|\overline{a}| = 2 \cdot 2 = 4$$

$$P_{\Delta B'B'C'} = \frac{1}{2} |\overline{BB'}| \cdot |\overline{BC'}| \cdot \sin 133^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 133^\circ$$

$$P_{\Delta B'B'C'} = 4,388$$

$$(\overline{B'C'})^2 = (\overline{BB'})^2 + (\overline{BC'})^2 - 2 \cdot (\overline{BB'}) \cdot (\overline{BC'}) \cos 133^\circ$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 133^\circ$$

$$\overline{B'C'} = 6,432$$

$$\sigma = \overline{BB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'B} = 3 + 6,432 + 4$$

$$\sigma = 7 + 6,432$$

$$\sigma = 13,43$$

$$4.3. \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} + \bar{c} = -\bar{b}$$

$$\bar{a} \times \bar{a} = 0$$

$$\bar{b} \times \bar{b} = 0$$

$$\bar{c} \times \bar{c} = 0$$

$$\sin 133^\circ = \sin (180 - 133) = \sin 47^\circ$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\bar{BC} \times \bar{BA}| = \frac{1}{2} |\bar{BC}| \cdot |\bar{BA}| \cdot \sin 47^\circ$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \sin 47^\circ$$

$$\overline{A'B'} \times \overline{A'C'} = (-\bar{b} + 2\bar{c}) \times (\bar{a} - 2\bar{b}) =$$

$$= (\bar{a} + \bar{c} + 2\bar{c}) \times (\bar{a} + 2(-\bar{b})) =$$

$$= (\bar{a} + 3\bar{c}) \times (\bar{a} + 2(\bar{a} + \bar{c})) =$$

$$= (\bar{a} + 3\bar{c}) \times (3\bar{a} + 2\bar{c}) =$$

$$= (\bar{a} \times 3\bar{a}) + \bar{a} \times 2\bar{c} + 3\bar{c} \times 3\bar{a} + 3\bar{c} \times 2\bar{c} =$$

$$= 0 + 2(\bar{a} \times \bar{c}) + 9(\bar{c} \times \bar{a}) + 0 =$$

$$= -2(\bar{c} \times \bar{a}) + 9(\bar{c} \times \bar{a}) = 7(\bar{c} \times \bar{a})$$

$$P_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} |\overline{A'B'} \times \overline{A'C'}| = \frac{1}{2} |7(\bar{c} \times \bar{a})|$$

$$P_{\Delta A'B'C'} = \frac{1 \cdot 7}{2} |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \sin 47^\circ$$

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A'B'C'} = 1 : 7$$