1. naloga

Za poljubni naravni števili $m$ in $n$ označimo z $D(m,n)$ največji skupni delitelj in z $v(m,n)$ njun najmanjši skupni večkratnik

1.1. Razcepite števila 45, 48 in 60 na prafaktorje (2 točki)

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\underline{\underline{45 = 3^2 \cdot 5}} \qquad \underline{\underline{48 = 2^4 \cdot 3}} \qquad \underline{\underline{60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}}$$

1.2. Izračunajte $\left( \frac{D(45,48)}{D(48,60)} - \frac{D(11,23)}{v(4,10)} \right) \cdot v(5,20)$ (6 točk)

$D(45,48) = 3$ ✓

$D(48,60) = 2^2 \cdot 3 = 12$ ✓

$D(11,23) = 1$ ✓

$v(4,10) = 20$ ✓

$v(5,20) = 20$ ✓

$$\left( \frac{3}{12} - \frac{1}{20} \right) \cdot 20 =$$

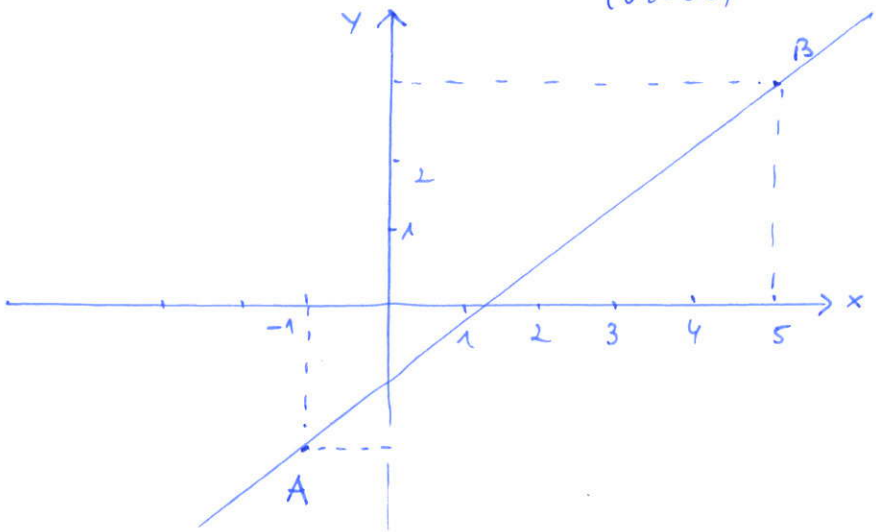
$$\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \right) \cdot 20 =$$

$$\frac{5-1}{20} \cdot 20 =$$

$$= \underline{\underline{4}}$$

2. naloga

Premica p na sliki poteka skozi točki A in B. Zapišite enačbo premice in izračunajte velikost ostrega kota, ki ga premica določa z abscisno osjo. Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje (6 točk)




A (-1, -2)
B (5, 3)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-2)}{5-(-1)} = \frac{5}{6}$$

$$y = k \cdot x + n$$

$$3 = \frac{5}{6} \cdot 5 + n$$

$$3 = \frac{25}{6} + n$$

$$n = 3 - \frac{25}{6}$$

$$n = \frac{18}{6} - \frac{25}{6}$$

$$n = -\frac{7}{6}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{5}{6}x - \frac{7}{6}}}$$

kot: $\tan \varphi = k$

$\tan \varphi = \frac{5}{6}$

$$\underline{\underline{\varphi = 39{,}81^\circ}}$$

3. naloga

Naj bosta $a$ in $b$ poljubni realni števili, $a > 0$, $b \neq 0$. Vsak izraz v levem stolpcu preglednice je enak enemu izrazu v desnem stolpcu. Izrazi v desnem stolpcu so označeni s črkami od A do L.

V preglednico v za to namenjen prostor vpišite črko izraza, ki je enak izrazu v levem stolpcu preglednice!

(5 točk)

| $a^0$ | L |
|---|---|
| $(ab^2)^2$ | D |
| $(a+b^2)^2$ | G |
| $(ab^2):(ab)^3$ | E |
| $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{ab}$ | F |
| $\sqrt{b^2}$ | C |

(A) $ab^4$

(B) $b$

(C) $|b|$

(D) $a^2b^4$

(E) $a^{-2}b^{-1}$

(F) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}}$

(G) $a^2+2ab^2+b^4$

(H) $\sqrt[5]{a^5b^5}$

(I) $a^2+b^4$

(J) $a^{-3}b^{-1}$

(K) $-1$

(L) $1$

$$(ab^2)^{+2} = a^2b^4$$

$$(a+b^2)^2 = a^2+2ab^2+b^4$$

$$(ab^2):(ab)^3 = \frac{ab^2}{a^3b^3} = \frac{1}{a^2b} = a^{-2}b^{-1}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{ab} = \sqrt[6]{a^3\cdot a^2\cdot b^2} = \sqrt[6]{a^5b^2} = a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{2}{6}} = \underline{\underline{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}}$$

4. naloga

Med števili 7 in 448 vrinite pet števil tako, da dobimo

a) prvih 7 členov aritmetičnega zaporedja

b) prvih 7 členov geometrijskega zaporedja (naraščajočega)

Izračunajte diferenco $d$, kvocient $q$ ter zapišite vrinjene člene obeh zaporedij (6 točk)

a) $a_1 = 7$

$a_7 = 448$

$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d$$
$$448 = 7 + 6\cdot d$$
$$6d = 448 - 7$$
$$\underline{\underline{d = 73,5}}$$

Vrinjeni členi:

80,5 154 227,5 301 374,5

b) $a_1 = 7$

$a_7 = 448$

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1}$$
$$448 = 7 \cdot q^6$$
$$q^6 = 64$$
$$\boxed{q_1 = 2}$$
$$q_2 = -2 \quad // \quad \text{ni naraščajoče}$$

Vrinjeni členi:

14, 28, 56, 112, 224

5. naloga

Določite realni števili $x$ in $y$ tako, da velja enakost

$$(2+ix)\cdot(5+i)=14+iy$$ (6 točk)

Rešitev:

$$(2+ix)\cdot(5+i)=14+iy$$

$$10+2i+5xi+xi^2=14+yi$$

$$10+2i+5xi-x=14+yi$$

$$10-x=14$$

$$10-14=x$$

$$\boxed{x=-4}$$

$$2i+5xi=yi$$

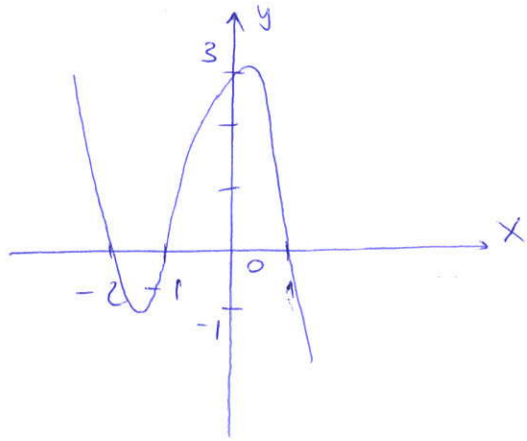
$$2i+5(-4)i=yi$$

$$2i-20i=yi \quad /:i$$

$$2-20=y$$

$$\boxed{y=-18}$$

6. Na sliki je graf polinoma $p(x)$ tretje stopnje, ki ima ničle $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.




6.1. Odgovorite na spodnja vprašanja: (4 točke)

a) Ali je vodilni koeficient polinoma $p(x)$ pozitiven ali negativen? negativen

Utemeljitev: $x \to \infty \Rightarrow p(x) \to -\infty$

b) Ali je prosti člen polinoma $p(x)$ pozitiven ali negativen? pozitiven

Utemeljitev: $p(0) = 3 > 0$

c) Koliko realnih rešitev ima enačba $p(x) = 0$? 3 realne

Utemeljitev: ker ima polinom tri realne ničle

č) Zapišite ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $q(x) = x^2 - 1$. 0

Utemeljitev: Ničle $q(x)$ so tudi ničle $p(x)$, zato $r(x) = 0$.

6.2. $p(x) = a(x+2)(x+1)(x-1)$

$p(0) = 3$

$p(0) = a \cdot (2) \cdot (1) \cdot (-1)$

$= -2 \cdot a$

$3 = -2 \cdot a$

$\underline{\underline{a = -\frac{3}{2}}}$

$p(x) = -\frac{3}{2}(x+2)(x^2-1)$

$p(x) = -\frac{3}{2}(x^3 - x + 2x^2 - 2)$

$p(x) = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 3x^2 + 3$

$p(x) = -\frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 3$

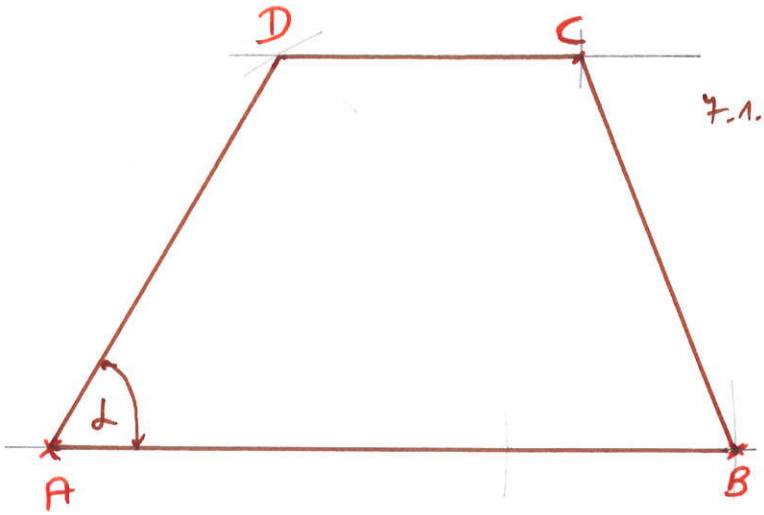
(4 točke)

7. Naloga

V trapezu ABCD meri stranica $a = |AB| = 9$ cm, $c = |CD| = 4$ cm, $d = |AD| = 6$ cm, in kot $\alpha = 60°$.

7.1. Konstruirajte trapez ABCD. Skozi oglišče D narišite vzporednico p k stranici $b = BC$. Premica p seka stranico a v točki E. Zapišite delilno razmerje $|AE| : |EB|$. (3 točke)

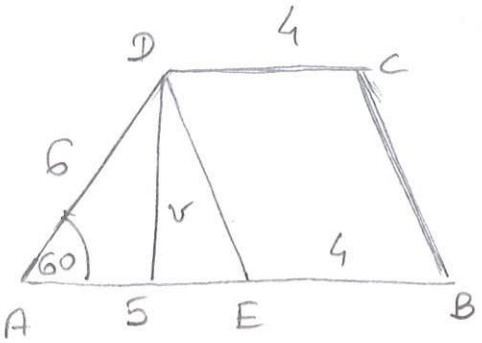
7.2. Izračunajte obseg in ploščino trapeza ABCD. Rezultata naj bosta točna. (5 točk)




Rešitev:

7.1. Potek konstrukcije:

1. kot $\alpha = 60°$
2. $AB = 9$ cm
   $AD = 6$ cm
3. Vzporednica vodoravno skozi D
4. $DC = 4$ cm




$|EB| = |CD| = 4$ cm

$|AE| = |AB| - |CD| = 9 - 4 = 5$ cm

$$\boxed{|AE| : |EB| = 5 : 4}$$

$DE^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60°$

$DE^2 = 31 \quad DE = \sqrt{31}$ cm

$o = AB + BC + CD + DA$

$$\boxed{o = (19 + \sqrt{31})\text{ cm}}$$

7.2. $v = AD \cdot \sin\alpha = 6 \cdot \sin 60°$

$v = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm

$P = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v = \frac{1}{2}(9 + 4) \cdot 3\sqrt{3}$

$$\boxed{P = \frac{39\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2}$$

8. Zemljišče s ploščino 405 $m^2$ ima obliko pravokotnika. Za njegovo ograditev bi potrebovali 81 m ograje. Izračunajte dolžino in širino zemljišča. (6 točk)

$P = 405\ m^2$

$o = 81\ m$

$a, b = ?$

$p = a \cdot b$

$a = \frac{p}{b}$

$\boxed{a = \frac{405}{b}}$

$o = 2(a+b)$

$81 = 2(a+b)$

$40{,}5 = a+b$

$\boxed{a = 40{,}5 - b}$

$40{,}5 - b = \frac{405}{b} \quad / \cdot b$

$40{,}5b - b^2 = 405$

$b^2 - 40{,}5b + 405 = 0 \quad / \cdot 2$

$2b^2 - 81b + 810 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 81^2 - 4 \cdot 2 \cdot 810$

$D = 81$

$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$b_{1,2} = \frac{81 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2}$

$b_1 = \frac{45}{2} = 22{,}5\ m;\ a_1 = 18\ m$

$\boxed{b_2 = 18\ m,\ a_1 = 22{,}5\ m}$

(9) Dani sta paraboli z enačbama $y=x^2-x-2$ in $y=x^2$

(9.1) Paraboli se sekata v točki P. Izračunaj koordinati točke P. (2 točki)

(9.2) Zapiši enačbi tangent na paraboli v njunem presečišču. (3 točke)

(9.3) Izračunaj kot med parabolama. (2 točki)

(9.1)

$y=x^2-x-2$

$y=x^2$

$y=y$

$x^2-x-2=x^2$

$-x=+2$

$x=-2$

$y=(-2)^2$

$y=4$

$P(-2,4)$

(9.2) Enačbi tangent:

$y'=2x-1$

$y'=-5$

$k_{t_1}=-5$

$y'=2x$

$y'=-4$

$k_{t_2}=-4$

$y-y_0=k_t\cdot(x-x_0)$

$y-4=-5\cdot(x+2)$

$y=-5x-6$

$y-4=-4(x+2)$

$y=-4x-4$

(9.3) $\tan\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$

$\tan\varphi=\left|\frac{-4+5}{1+20}\right|=\frac{1}{21}$

$\varphi=2{,}7^\circ$

10. Naloga.

V razredu z 28 učenci je 12 deklet in 16 fantov. Trem fantom je ime Anže.

10.1. Učitelj bo za spraševanje naključno izbral enega od učencev (dekle ali fanta) tega razreda. Izračunajte verjetnost dogodka A, da bo naključno vprašanemu ime Anže. (1 točka)

10.2. Učitelj bo za spraševanje naključno izbral dva od fantov tega razreda. Izračunajte verjetnost dogodka B, da bo natanko enemu ime Anže. (3 točke)

10.3. Učitelj bo za spraševanje naključno izbral tri učence tega razreda. Izračunajte verjetnost dogodka C, da bosta v naključno izbrani trojki zastopana oba spola. (4 točke)

Rešitve

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{28}{1}} = \frac{3}{28} = 0{,}107$$

$$P(B) = \frac{\binom{13}{1}\binom{3}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{13 \cdot 3}{120} = \frac{13}{40} = 0{,}325$$

$$P(C) = \frac{\binom{12}{1}\binom{16}{2} + \binom{12}{2}\binom{16}{1}}{\binom{28}{3}} = \frac{16}{21} = 0{,}762$$

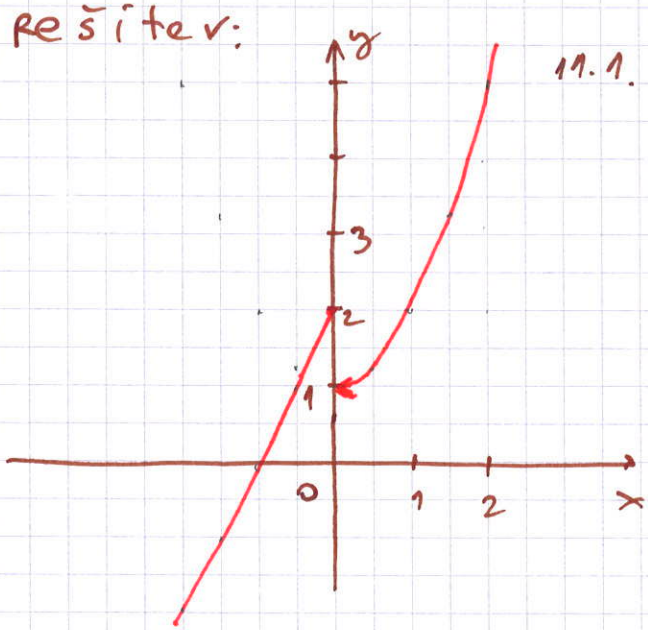
11. Naloga

Dana je funkcija $f$ s predpisom $f(x)=\begin{cases} x^2+c\,; & x>0 \\ 2x+2\,; & x\leq 0 \end{cases}$

11.1. V spodnji koordinatni sistem narišite graf funkcije $f$ za $c=1$. V katerih točkah je funkcija zvezna? (4 točke)

11.2. Določite vrednost konstante $c$ tako, da bo funkcija $f$ zvezna za vsak $x\in\mathbb{R}$. (1 točka)

Rešitev:




11.1. Funkcija $f(x)$ je zvezna na intervalu:

$$\boxed{x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$$

11.2.

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$2\cdot 0+2=\lim_{x\to 0}(x^2+c)$$

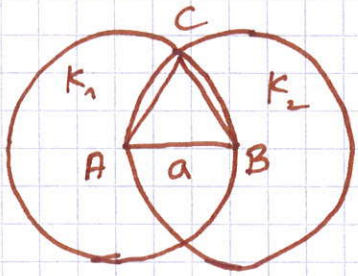
$$2=0+c$$

$$2=c$$

$$\boxed{c=2}$$

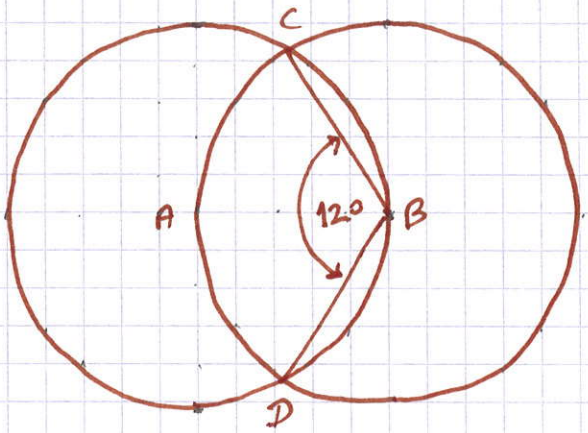
12. Naloga

Na sliki je enakostranični trikotnik ABC s stranico $a = 2$ cm. Vsaka od krožnic poteka skozi dve oglišči trikotnika in ima središče v tretjem oglišču. Krožnici omejujeta kroga $K_1$ in $K_2$. Izračunajte ploščino preseka $K_1 \cap K_2$.




(7 točk)

Rešitev:

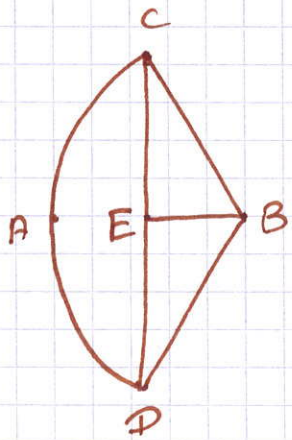



$$P_{izsek\,ADBC} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot 120$$

$$P_{izsek} = \frac{1}{3}\pi r^2$$

$$P_{\Delta_{CEDB}} = \frac{1}{2} CD \cdot EB =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \cdot v_a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} v_a \cdot a$$




$$P_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$P_\Delta = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

$$P_{odsek} = P_{izsek} - P_\Delta$$

$$P_{lika} = 2 P_{odsek} = 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{4} 2^2 \cdot \sqrt{3}\right) \qquad \boxed{P = 4{,}91\ cm^2}$$