SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Višja raven

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Sobota, 6. junij 2015 / 90 minut

Naloga 1 je obvezna.

1. Rešite te naloge:

   1.1. Pravokotnik s stranicama $a = 5$ in $b = 3$ zavrtimo okrog stranice a. Izračunajte površino in prostornino tako nastalega telesa. Rezultat naj bo točen.

   (3 točke)

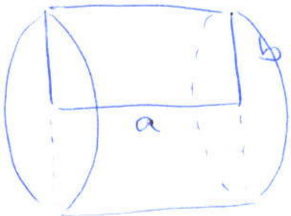
   1.2. Trikotnik ABC s stranicami $a = 13$, $b = 20$ in $c = 21$ zavrtimo okrog stranice c. Izračunajte površino tako nastale vrtenine. Rezultat naj bo točen.

   (6 točk)

   1.3. Krivuljo z enačbo $y = 4 - x^2$ zavrtimo na intervalu $[-2, 2]$ okrog abscisne osi. Izračunajte prostornino tako nastale vrtenine. Rezultat naj bo točen.

   (4 točke)

1.1.

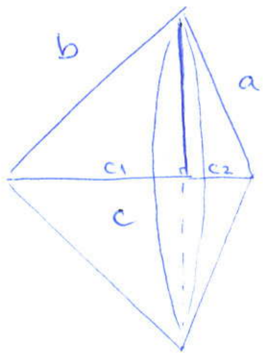


valj
$r = b = 3$
$v = a = 5$

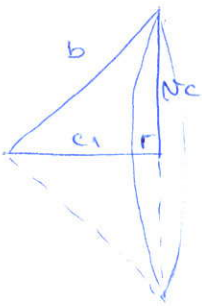
$P = 2\pi r(r+v)$
$P = 2\pi \cdot 3(3+5)$
$P = 48\pi$

$V = \pi r^2 \cdot v$
$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$
$V = 45\pi$

1.2.

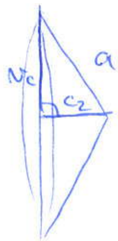


1. stožec



$r = v_c = 12$
$v_1 = c_1 = 16$
$s_1 = b = 20$

2. stožec



$r = v_c = 12$
$v_1 = c_2 = 5$
$s_2 = a = 13$

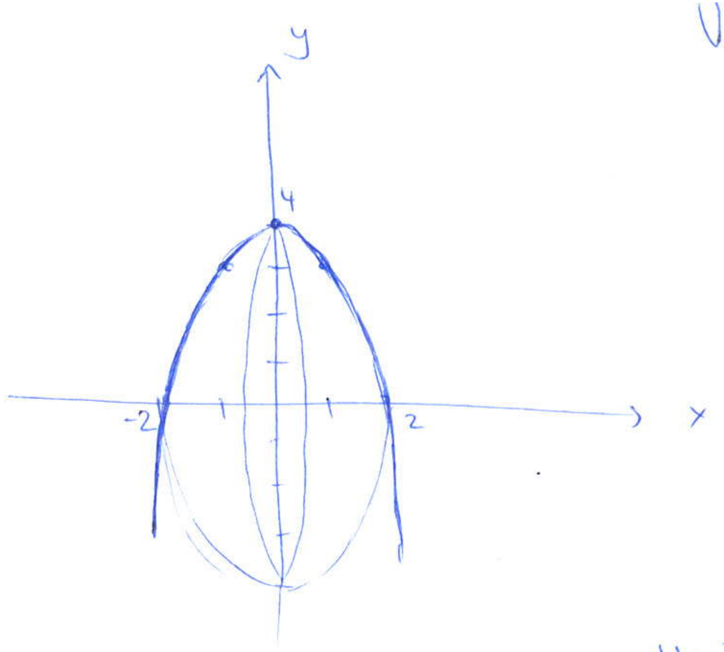
$s = \frac{a+b+c}{2}$
$s = 27$
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$S = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6}$
$S = 126$
$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$
$v_c = \frac{2 \cdot S}{c} = 12$

$b^2 = v_c^2 + c_1^2$
$c_1 = \sqrt{b^2 - v_c^2}$
$c_1 = 16$

$c_2 = c - c_1$
$c_2 = 5$

$P = pl_{1.st} + pl_{2.st}$
$P = \pi r s_1 + \pi r s_2$
$P = \pi \cdot 12 \cdot 20 + \pi \cdot 12 \cdot 13$
$P = 396\pi$

1.3. $y = 4 - x^2$



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4) \, dx$$

$$V = \pi \left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^{2}$$

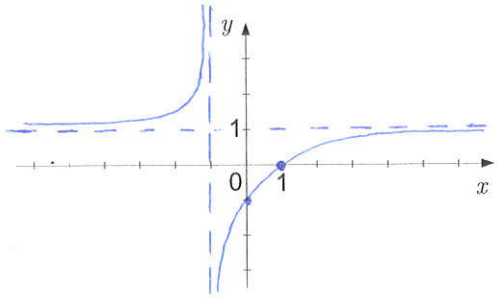
$$V = \pi \left(\left(16 \cdot 2 - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^5}{5} \right) - \left(16 \cdot (-2) - \frac{8 \cdot (-2)^3}{3} + \frac{(-2)^5}{5} \right) \right)$$

$$V = \frac{512\pi}{12}$$

Naloga 2 je obvezna.

2. Dana je racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

2.1. V dani koordinatni sistem narišite krivuljo $y=f(x)$. Zapišite predpis inverzne funkcije f^{-1} in definicijsko območje funkcije f^{-1}.



(4 točke)

2.2. Naj premica $y=8x+n$ seka krivuljo $y=f(x)$. Dokažite, da abscisi presečišč zadoščata enačbi $8x^2+(n+7)x+n+1=0$.

(2 točki)

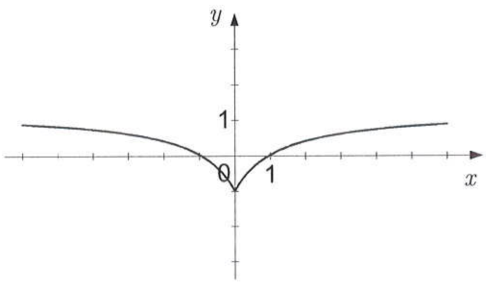
2.3. Izračunajte, za katere vrednosti parametra n je premica $y=8x+n$ tangenta na krivuljo $y=f(x)$.

(3 točke)

2.4. Na spodnji sliki je narisana ena od krivulj

$y=f(x)$, $\quad y=|f(x)|$, $\quad y=f(-x)$, $\quad y=f(|x|)$, $\quad y=-f(x)$.

Obkrožite enačbo krivulje, ki je narisana na sliki. Izračunajte ploščino lika, ki ga določata abscisna os in narisana krivulja. Rezultat naj bo točen.



(5 točk)

2.1. ničla: $x=1$ L

pol: $x=-1$ L

$f(0)=-1$

asimpt.: $y=1$

inverz: $x \leftrightarrow y$

$$x=\frac{y-1}{y+1}$$

$$x(y+1)=y-1$$

$$xy+x=y-1$$

$$xy-y=-1-x$$

$$y(x-1)=-x-1$$

$$y=\frac{-x-1}{x-1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}$$

$D_f: \mathbb{R}\setminus\{1\}$

2.2. $y=f(x)$

$$8x+n=\frac{x-1}{x+1} \quad /\cdot(x+1)$$

$$(8x+n)(x+1)=x-1$$

$$8x^2+8x+nx+n-x+1=0$$

$$\underline{\underline{8x^2+x(n+7)+n+1=0}}$$

2.3. tangenta $\Rightarrow$ 1 presečišče $\Rightarrow D=0$

$8x^2+x(n+7)+n+1=0$

$a=8$

$b=n+7$

$c=n+1$

$$D=0$$

$$b^2-4ac=0$$

$$(n+7)^2-4\cdot 8\cdot(n+1)=0$$

$$n^2+14n+49-32n-32=0$$

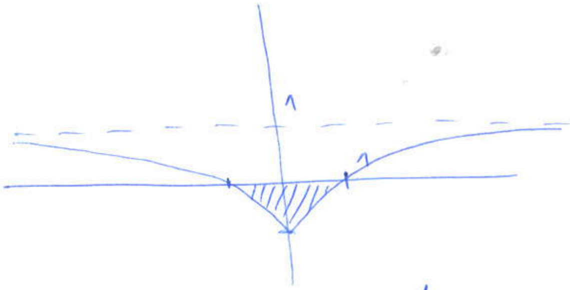
$$n^2-18n+17=0$$

$$(n-17)(n-1)=0$$

$$\underline{n_1=17}$$

$$\underline{\underline{n_2=1}}$$

2.4.



$y = f(|x|)$

$$S = \left| \int_{-1}^{1} \frac{|x|-1}{|x|+1}\, dx \right| = 2 \cdot \left| \int_{0}^{1} \frac{x-1}{x+1}\, dx \right| = *$$

$$\int \frac{x-1}{x+1}\, dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \int 1\, dx - 2 \int \frac{1}{x+1}\, dx =$$

$$= x - 2 \cdot \ln|x+1| + c$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx \qquad \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array}$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + c$$
$$= \ln|x+1| + c$$

$$* = 2 \cdot (x - 2 \cdot \ln|x+1|) \Big|_0^1 =$$

$$= 2 \cdot (1 - 2 \ln 2) - 2(0 - 2 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0})$$

$$= \underline{\underline{|2 - 4 \ln 2|}}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \underline{\underline{4 \ln 2 - 2}}$$

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

3. V posodi imamo 10 kroglic: 5 rdečih, 3 modre in 2 beli.

3.1. Iz posode naključno izvlečemo hkrati 4 kroglice. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
A – vse izvlečene kroglice so rdeče,
B – dve izvlečeni kroglici sta rdeči, dve pa modri,
C – vsaj ena izvlečena kroglica je bela.

(5 točk)

3.2. Iz posode naključno izvlečemo hkrati 2 kroglici. Izračunajte verjetnost dogodka, da sta obe izvlečeni kroglici modri, če vemo, da je vsaj ena od njiju modra.

(6 točk)

3.3. Iz posode izvlečemo vse kroglice in jih naključno postavimo v vrsto. Izračunajte verjetnost dogodka, da stojijo v vrsti vse tri modre kroglice skupaj.

(2 točki)

3.1. 5R, 3M, 2B $\Rightarrow 4$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42}$$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{7}$$

$$P(C) = 1 - \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{2}{3}$$

3.2. A… obe M
B… vsaj 1M

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}}{1-\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}} = \frac{1}{8}$$

3.3. vse možnosti: $\frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2520$

ož: $\boxed{3M}$, 5R, 2B

$$\frac{8!}{5!\,2!} = 168$$

$$P(D) = \frac{168}{2520} = \frac{1}{15}$$

V sivo polje ne pišite.

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

V sivo polje ne pišite.

4. Dana je realna funkcija f s predpisom $f(x)=2^x$.

4.1. Rešite enačbo $f(x)+f(2x)=f(x+2)$. Rezultat naj bo točen.

(3 točke)

4.2. Dokažite, da velja $(f(1)+f'(1))\cdot\ln 2=f'(1)+f''(1)$.

(3 točke)

4.3. Izračunajte vsoto $\sum_{n=1}^{10} f(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

(3 točke)

4.4. Kdaj konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$? Izračunajte $x\in\mathbb{R}$, da bo vsota te vrste enaka 1.

(4 točke)

4.1 $2^x+2^{2x}=2^{x+2}$

$2^x+2^{2x}=2^x\cdot 2^2$ $\qquad 2^x=t$

$t+t^2=4t$

$t^2-3t=0$

$t(t-3)=0$

$t_1=0 \qquad t_2=3$

(1) $2^x=0$ ni rešitve

(2) $2^x=3$

$x\cdot\log 2=\log 3$

$x=\frac{\log 3}{\log 2}$

4.2. $f(x)=2^x$

$f'(x)=2^x\cdot\ln 2$

$f''(x)=2^x\ln 2\cdot\ln 2$

$f(1)=2$

$f'(1)=2\cdot\ln 2$

$f''(1)=2\ln 2\cdot\ln 2$

$(f(1)+f'(1))\cdot\ln 2=f'(1)+f''(1)$

$(2+2\cdot\ln 2)\cdot\ln 2=2\cdot\ln 2+2\cdot\ln 2\cdot\ln 2$

$2\cdot(1+\ln 2)\cdot\ln 2=2\cdot\ln 2(1+\ln 2)$

$L=D$

4.3. $\sum_{n=1}^{10} f(n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$

$=2^1+2^2+\cdots+2^{10}$ → končna geom. vrsta, $k=2$

$S_{10}=a_1\cdot\frac{k^{10}-1}{k-1}=2\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=2046$

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)=2^{1x}+2^{2x}+2^{3x}+\cdots$ → neskončna geom. vrsta $k=2^x$

konvergira $-1<k<1$

$-1<2^x<1$

$-1<2^x$ rešitev $\mathbb{R}$

$2^x<1$

$2^x<2^0$

$x<1$

vsota: $S=\frac{a_1}{1-k}$

$1=\frac{2^x}{1-2^x}$

$1-2^x=2^x$

$1=2\cdot 2^x$ → $2^x=\frac{1}{2}$

$x=-1$