

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK

Osnovna raven
MATEMATIKA
≡≡≡ Izpitna pola 1 ≡≡≡

Sobota, 6. junij 2015 / 120 minut

1. Primerjajte števili a in b ter v srednji stolpec vstavite simbole $>$, $<$ ali $=$ (glejte prva dva rešena primera).

število a		število b
-1	$>$	$-\frac{5}{2}$
-1	$<$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{7}{2}$		$-\frac{5}{2}$
$-\frac{2}{3}$		$-\frac{5}{2}$
$-2\sqrt{3}$		$-3\sqrt{2}$
π		3,14
e		2,7
2015^{2015}		2015!

(6 točk)

V sivo polje ne pišite

V sivo polje ne pišite.

2. Dani so vektorji $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 5, 3)$ in $\vec{c} = (x, 2, 4)$.

2.1. Izračunajte $2\vec{a} + \vec{b}$.

(2)

2.2. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(2)

2.3. Izračunajte dolžino vektorja \vec{b} .

(2)

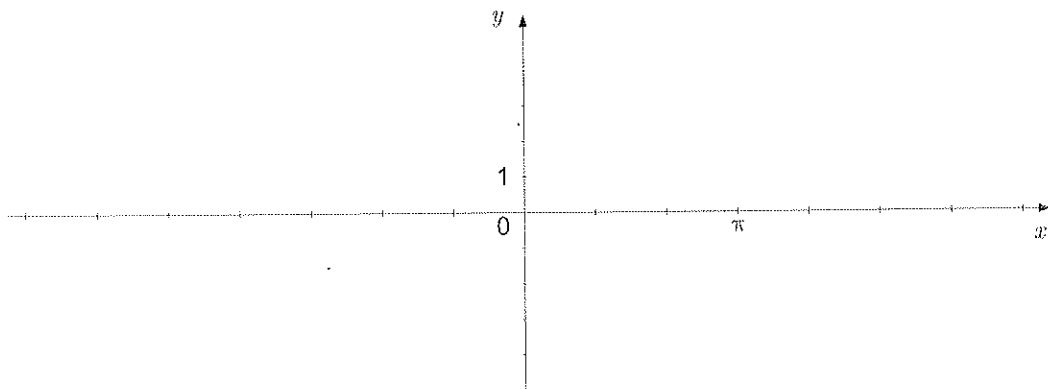
2.4. Določite x tako, da bosta vektorja \vec{a} in \vec{c} pravokotna.

(2)

(8 točk)

3. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = 2\sin x - 1$.

3.1. V dani koordinatni sistem narišite graf funkcije f .



(3)

3.2. Izračunajte odvod $f'(x)$.

(2)

3.3. Izračunajte nedoločeni integral $\int f(x)dx$.

(3)
(8 točk)

V sivo polje ne pišite

V sivo polje ne pišite

4. Dano je kompleksno število $z = \sqrt{5} - 2i$. Izračunajte:

4.1. $z \cdot \bar{z} =$

(2)

4.2. $|z| =$

(1)

4.3. $z^2 + i^{19} =$

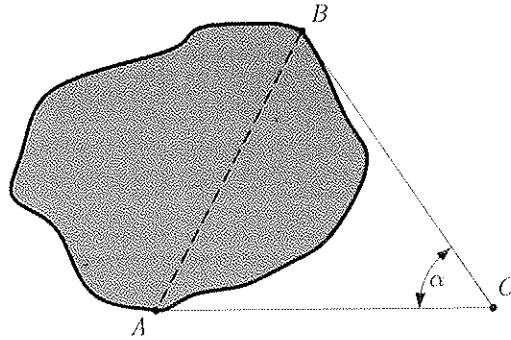
(3)

4.4. $z^{-1} =$

(2)
(8 točk)



5. Janez je dobil nalogo, da izračuna širino jezera med točkama A in B . Izmeril je $|AC| = 255$ m, $|BC| = 232$ m in $\alpha = 56^\circ$. Kolikšna je razdalja med točkama A in B ? Rezultat zaokrožite na meter natančno.



(5 točk)

V sivo polje ne pišite.

6. Pri katerih vrednostih realnega števila x leži graf funkcije f , ki je dana s predpisom $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$, pod premico z enačbo $y = -x + 1$.

(6 točk)

7. Eksponentna funkcija f ima predpis $f(x) = 3^x - \frac{2}{3}$.

7.1. Natančno izračunajte neznani koordinati točk $A(-3, y)$ in $B(x, \frac{25}{3})$ na grafu funkcije f .

(5)

7.2. Graf funkcije f ima vodoravno asimptoto. Zapišite njeno enačbo. Ali je funkcija f naraščajoča ali padajoča? Odgovor utemeljite.

(2)

(7 točk)

V sivo polje ne pišite

V sivo polje ne pišite.

8. V geometrijskem zaporedju s količnikom 2 je vsota prvih dvanajstih členov enaka 28665. Zapišite splošni člen tega zaporedja. Koliko začetnih členov zaporedja je manjših od 3829? Zapišite odgovor.

(7 točk)



9. V razredu z 28 dijakov je 20 deklet in 8 fantov.

9.1. V ponedeljek bo profesor naključno izbral enega od njih in ocenil njegovo znanje. Izračunajte verjetnost, da bo izbrani dijak fant.

(2)

9.2. V sredo bosta naključno izbrana dva. Izračunajte verjetnost, da bosta to dve dekleti.

(3)

(5 točk)

V sivo polje ne pišite.

V sivo polje ne pišite.

10. Parabola ima enačbo $y = -x^2 + 4$.

10.1. V točki $A(1, 3)$ položimo tangento na parabolo. Zapišite enačbo tangente.

(3)

10.2. Parabola, tangenta na parabolo v točki A in abscisna os omejujejo enostavni lik. Izračunajte njegovo ploščino.

(5)

(8 točk)



11. Razmerje med številom odraslih in številom otrok na koncertu je bilo $2 : 3$. Otrok je bilo 456. Vstopnica za odraslega je bila dvakrat dražja od vstopnice za otroka. Izkupiček od prodaje vstopnic je znašal 14896 evrov. Kolikšna je bila cena vstopnice za odraslega? Zapišite odgovor.

(6 točk)

V sivo polje ne pišite

V sivo polje ne pišite.

12. Izračunajte limite.

$$12.1. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 2x - 35}$$

(2)

$$12.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

(2)

$$12.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

(2)
(6 točk)

Rešitev:

1.

$-\frac{7}{2}$	$<$	$-\frac{5}{2}$
$-\frac{2}{3}$	$>$	$-\frac{5}{2}$
$-2\sqrt{3}$	$>$	$-3\sqrt{2}$
π	$>$	3,14
e	$>$	2,7
2015^{2015}	$>$	2015!

Rešitev:

$$\begin{aligned} 2.1. \quad 2\vec{a} + \vec{b} &= 2(4, -3, 1) + (-2, 5, 3) \\ &= (8, -6, 2) + (-2, 5, 3) \end{aligned}$$

$$2\vec{a} + \vec{b} = (6, -1, 5)$$

$$\begin{aligned} 2.2. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= (4, -3, 1) \cdot (-2, 5, 3) = \\ &= -8 - 15 + 3 = -20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.3. \quad |\vec{b}| &= \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(-2, 5, 3) \cdot (-2, 5, 3)} = \\ &= \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38} \end{aligned}$$

$$2.4. \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$(4, -3, 1) \cdot (x, 2, 4) = 0$$

$$4x - 6 + 4 = 0$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Resítev:

3.a) Ničle : $2 \sin x - 1 = 0$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k2\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k2\pi$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

MAXIMUM : $\sin x = 1$

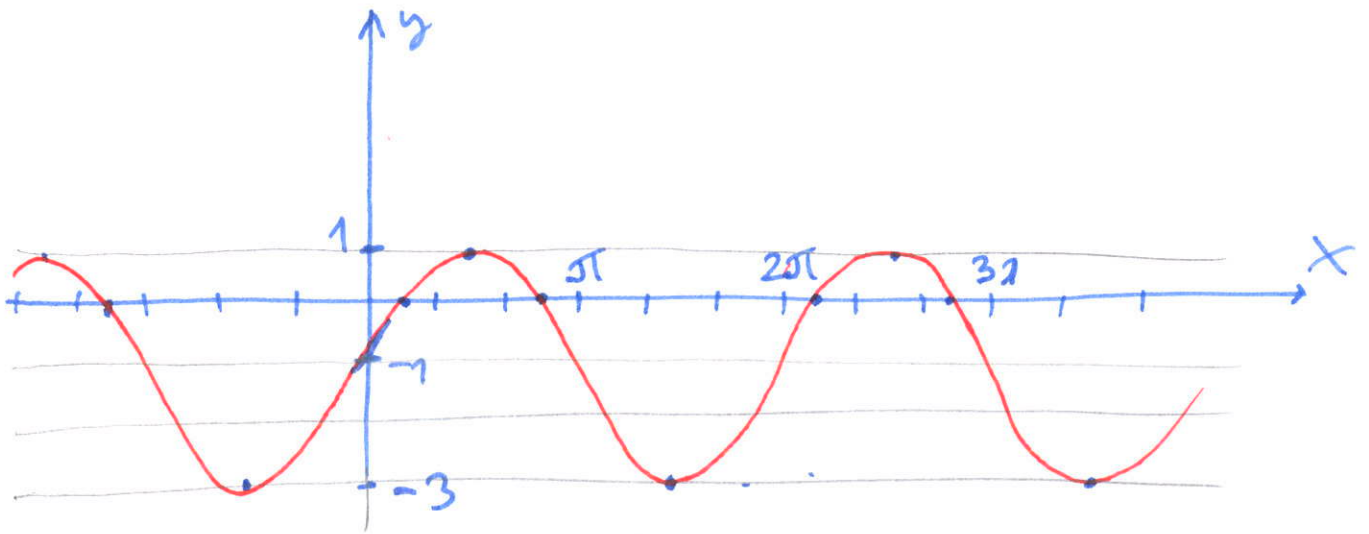
$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$y_{\max} = 2 - 1 = 1$$

MINIMUM : $\sin x = -1$

$$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$y_{\min} = 2(-1) - 1 = -3$$



$$b) \quad f'(x) = (2 \sin x - 1)$$

$$y' = 2 \cos x$$

$$c) \quad \int f(x) dx =$$

$$\int (2 \sin x - 1) dx =$$

$$= 2(-\cos x) - x + C$$

$$= -2 \cos x - x + C$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} 4.1. \quad z \cdot \bar{z} &= (\sqrt{5} - 2i)(\sqrt{5} + 2i) = \\ &> (\sqrt{5})^2 - (2i)^2 = 5 - 4i^2 = \\ &= 5 - 4(-1) = 5 + 4 = 9 \end{aligned}$$

$$4.2. \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\begin{aligned} 4.3. \quad z^2 + i^{19} &= (\sqrt{5} - 2i)^2 + i^{16} \cdot i^3 \\ &= 5 - 4\sqrt{5} \cdot i + 4i^2 + 1 \cdot (-i) = \\ &= 5 - 4\sqrt{5}i - 4 - i = 1 - i(1 + 4\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.4. \quad z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2i} \frac{\sqrt{5} + 2i}{\sqrt{5} + 2i} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + 2i}{(\sqrt{5})^2 - (2i)^2} = \frac{\sqrt{5} + 2i}{5 - 4i^2} = \frac{\sqrt{5} + 2i}{5 + 4} \end{aligned}$$

$$z^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{9} + \frac{2}{9}i$$

Rezitev:

5. Kosinusni izrek

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 56$$

$$BC^2 = 255^2 + 232^2 - 2 \cdot 255 \cdot 232 \cdot \cos 56$$

$$BC^2 = 52685,2956$$

$$BC = \sqrt{52685,2956}$$

$$BC = 229,53 \text{ m}$$

$$BC = 230 \text{ m}$$

Rešitev:

7.1. $A(-3, y)$

$$y_A = 3^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3^3} - \frac{2}{3} = \\ = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} = -\frac{17}{27}$$

$$B\left(x, \frac{25}{3}\right)$$

$$\frac{25}{3} = 3^x - \frac{2}{3}$$

$$\frac{25}{3} + \frac{2}{3} = 3^x$$

$$\frac{27}{3} = 3^x$$

$$9 = 3^x$$

$$3^2 = 3^x$$

$$x = 2$$

$$A\left(-3, -\frac{17}{27}\right) \quad B\left(2, \frac{25}{3}\right)$$

7.2. Vodoravna asimptota

$$y = -\frac{2}{3}$$

$$(f(x))' = (3^x)' - \left(\frac{2}{3}\right)'$$

$$= 3^x \cdot \ln 3 - 0$$

$$= 3^x \cdot \ln 3$$

$$\ln 3 = 1,0986$$

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 1$$

$$3^x > 0 \quad \text{za } x \in (-\infty, +\infty)$$

Prvi odvod funkcije je pozitiven na celém definičijem območju,

zato je funkcija povsod

narasčajoča.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$$

Resiter:

$$8. \quad q = 2 \quad S_{12} = 28665$$

$$a_n = ? \quad a_n < 3829.$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$28665 = \frac{a_1 (2^{12} - 1)}{2 - 1}$$

$$28665 = a_1 \cdot 4095 \quad /: 4095$$

$$7 = a_1$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\boxed{a_n = 7 \cdot 2^{n-1}} = 7 \cdot 2^n \cdot 2^{-1}$$

$$a_n = 7 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^n}$$

$$a_n < 3829$$

$$\frac{7}{2} 2^n < 3829 \quad / \cdot \frac{2}{7}$$

$$2^n < 1094$$

$$\ln 2^n < \ln 1094$$

$$n \cdot \ln 2 < \ln 1094 \quad / : \ln 2$$

$$n < \frac{\ln 1094}{\ln 2}$$

$$n < 10,95$$

Začetnih deset členov tega zaporedja je manjših od 3829.

Resitev:

9. a)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{20}{0} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{28}{1}} = \frac{1 \cdot 8}{28} = \frac{2}{7}$$

b)

$$P(B) = \frac{\binom{20}{2} \binom{8}{0}}{\binom{28}{2}} = \frac{190}{378}$$

$$P(B) = \frac{95}{189}$$

Resitev:

10. $y = 4 - x^2$

$$y' = 0 - 2x$$

$$y' = -2x$$

$$A(1, 3)$$

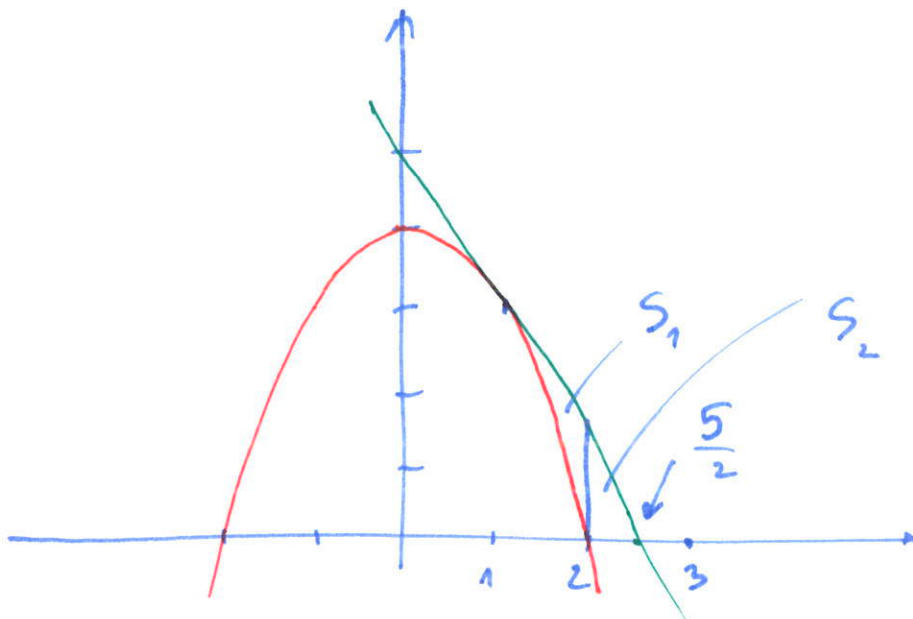
$$k_t = y'_A = -2 \cdot x_A = -2 \cdot 1 = -2$$

$$y - y_A = k_t(x - x_A)$$

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

$$y - 3 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 5$$



$$S_1 = \int_1^2 \left[(-2x+5) - (4-x^2) \right] dx =$$

$$= \int_1^2 (-2x+5-4+x^2) dx =$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_2^{5/2} (5 - 2x) dx =$$
$$= \left(5x - 2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^{5/2} = \left(5x - x^2 \right) \Big|_2^{5/2} =$$

$$= \left(5 \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right) - (5 \cdot 2 - 2^2) =$$

$$= \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right) - (10 - 4) =$$

$$= \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{7}{12}$$

Rešitev:

$$11. \quad D : T = 2 : 3$$

$$D = 2x$$

$$T = 3x$$

$$3x = 456 / :3$$

$$x = 152$$

$$D = 2 \cdot 152$$

$$D = 304$$

$C =$ cena vstupnice
za otroka

$$D \cdot 2C + T \cdot C = 14896$$

$$304 \cdot 2 \cdot C + 456 \cdot C = 14896$$

$$608C + 456 \cdot C = 14896$$

$$1064C = 14896 / : 1064$$

$$C = 14 \text{ Eurov}$$

$$2C = 28 \text{ Eurov}$$

Cena vstupnice za

odraslega je 28 Eurov.

Resiter:

$$\begin{aligned} 11.1. \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 2x - 35} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7) \cdot (x+7)}{(x-7)(x+5)} = \\ &= \frac{7+7}{7+5} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$12.3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$