Matura avgust 2015 višji nivo

1. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = 2x\sin(3x)$.

   - Izračunajte ničle dane funkcije.
   - Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x)$ v točki A z absciso $x = \frac{\pi}{6}$.
   - Natančno izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta dana funkcija in abscisna os na intervalu $[0, \frac{\pi}{3}]$.

2. V množici kompleksnih števil je dano kompleksno število $z_1 = -2 + 3i$.

   - Za katera kompleksna števila $u = x + yi;\quad x, y \in \mathbb{R}$ velja $|z_1 - Re(u)| = \sqrt{10}$ in $u \cdot \overline{u} = 13$.
   - Dana je enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Izračunaj koeficiente a, b, c tako, da bosta števili z_1 in $z_2 = 2$ rešitvi enačbe.
   - V kompleksni ravnini narišite množico kompleksnih števil
     $\mathcal{A} = \{w \in \mathbb{C}; (|w - z_1| \leq 3) \wedge (Im(z) \geq Re(z) + 2)\}$.
     Natančno izračunajte ploščino območja $\mathcal{A}$.

3. Dana je kocka $ABCDEFGH$ z robom a. Točka P je razpolovišče daljice AD, točka S pa leži na presečišču diagonal ploskve $EFGH$.

   - Dani so vektorji $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ in $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Z danimi vektorji izrazi vektorja $\overrightarrow{BS}$ in $\overrightarrow{CP}$, izračunaj njun skalarni produkt ter kot med njima.
   - Točke D, P, F predstaljajo oglišča trikotnika ΔDPF. Izračunajte velikost največjega kota v danem trikotnika.
   - Kocki včrtamo največjo možno kroglo. Za koliko % je prostornina krogla manjše od prostornine kocke. Zapišite odgovor.

4. V ravnini so dane točke $A(1, 1)$, $B(5, 1)$ in $C(7, 7)$. Z zrcaljenjem točke B preko premice $y = x$ dobimo točko D.

   - V koordinatni sistem vrišite dane točke in točko D. Zapišite enačbo krožnice, ki je očrtana trikotniku ΔABC.
   - Izračunajte ploščino štirikotnika $ABCD$.
   - Trikotnik ΔABC zavrtimo okoli $360°$ okoli stranice AC. Dobimo geometrijsko telo G. Dokažite, da je prostorina telesa G enaka $V = \frac{\pi e f^2}{12}$, kjer je $e = AC$ in $f = BD$.
   - Izračunajte absciso točke T, ki leži na abscisni osi tako, da bo vsota kvadratov razdalj točke T do točke A in točke T do točke C minimalna.

1. naloga

$f(x) = 2x \sin 3x$

a) ničle $\quad 2x \cdot \sin 3x = 0$

$2x = 0 \qquad \sin 3x = 0$

$x_1 = 0 \qquad 3x = k\pi$

$x_2 = \frac{k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z}$

skupna rešitev $\quad x = \frac{k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z}$ (zajame tudi $x=0$, kadar je $k=0$)

b) najprej določimo točko A z absciso $\frac{\pi}{6}$ (vstavimo v funkcijo $f(x)$)

$y = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$

$A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

→ odvod: (odvajamo kot produkt $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$f'(x) = 2 \cdot \sin(3x) + 2x \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 2 \cdot \sin(3x) + 6x \cdot \cos(3x)$

→ določimo smerni koeficient tangente: (v odvod vstavimo absciso točke A)

$k_t = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) + 6 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 + \pi \cdot 0$

$k_t = 2$

→ vstavimo k_t in $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ v nastavek za premico $y = kx + n$

$\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + n$

$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + n \quad \Rightarrow \quad n = 0 \quad \Rightarrow$ tangenta $\quad y = 2x$

c) ploščino izračunamo s pomočjo določenega integrala

$$\underbrace{\int_0^{\pi/3} 2x \cdot \sin(3x)\,dx}_{\text{PER PARTES!}} = -2x \cdot \frac{1}{3}\cos(3x)\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \left(-\frac{1}{3}\right)\cos(3x) \cdot 2\,dx = \underline{-\frac{2}{3}x\cos(3x) + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x)\,dx}$$

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$2x = u \qquad dv = \sin(3x)dx$

$2dx = du \qquad v = \int \sin(3x)dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t$

nova neznanka $\quad 3x = t \qquad dx = \frac{dt}{3} \qquad \boxed{v = -\frac{1}{3}\cos(3x)}$

$3dx = dt$

$$\int \cos(3x)\,dx = \int \cos(t)\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t = \frac{1}{3}\sin 3x$$

↑ nova neznanka

$3x = t$

$3dx = dt$

$dx = \frac{dt}{3}$

vrnemo se v per partes:

$$-\frac{2}{3}x\cos(3x) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x \Big|_0^{\pi/3}$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\pi}{3}\cos(3\tfrac{\pi}{3}) + \frac{2}{9}\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \Big(\underbrace{-\frac{2}{3}\cdot 0\underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{1}}_{0} + \frac{2}{9}\underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{0}\Big)$$

$$= -\frac{2\pi}{9}\cdot\underbrace{\cos\pi}_{(-1)} + \frac{2}{9}\underbrace{\sin\pi}_{0} = \frac{2\pi}{9}$$

2. naloga

$|z_1 - Re(u)| = \sqrt{10}$ $u \cdot \bar{u} = 13$

$z_1 = -2+3i$

$u = x+yi$

$Re(u) = x$

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$ ABSOLUTNA VREDNOST KOMPL. ŠT.

$|-2+3i - x| = \sqrt{10}$

$|(-2-x) + 3i| = \sqrt{10}$

združimo realne dele

$\sqrt{(-2-x)^2 + (3)^2} = \sqrt{10} \quad |^2$

$(-2-x)^2 + 3^2 = 10$

$4 + 4x + x^2 + 9 = 10$

$x^2 + 4x + 13 - 10 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -1$

$u \cdot \bar{u} = 13$

$(x+yi)\cdot(x-yi) = 13$

$x^2 - \cancel{xyi} + \cancel{xyi} - y^2i^2 = 13$

$\boxed{x^2 + y^2 = 13}$

vstavim najprej x_1

$(-3)^2 + y^2 = 13$

$9 + y^2 = 13$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

nato še x_2

$(-1)^2 + y^2 = 13$

$1 + y^2 = 13$

$y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

zapišem rešitve

$u_1 = -3 + 2i$

$u_2 = -3 - 2i$

$u_3 = -1 + 2i\sqrt{3}$

$u_4 = -1 - 2i\sqrt{3}$

b) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ rešitvi $z_1 = -2+3i$ in $z_2 = 2$

$\Downarrow$

$z_3 = -2-3i$ (kompleksne rešitve vedno nastopajo v konjugiranih parih)

pomagamo si z razcepno obliko

$A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$

$A = 1$ ker je vodilni koef. zgoraj 1

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$ vstavimo dane rešitve

$(x-(-2+3i))(x-(-2-3i))(x-2) = 0$

$\underbrace{((x+2)-3i)((x+2)+3i)}_{\text{razlika kvadratov}}(x-2) = 0$ odpravimo oklepaje

$((x+2)^2 - 3^2 i^2)(x-2) = 0$

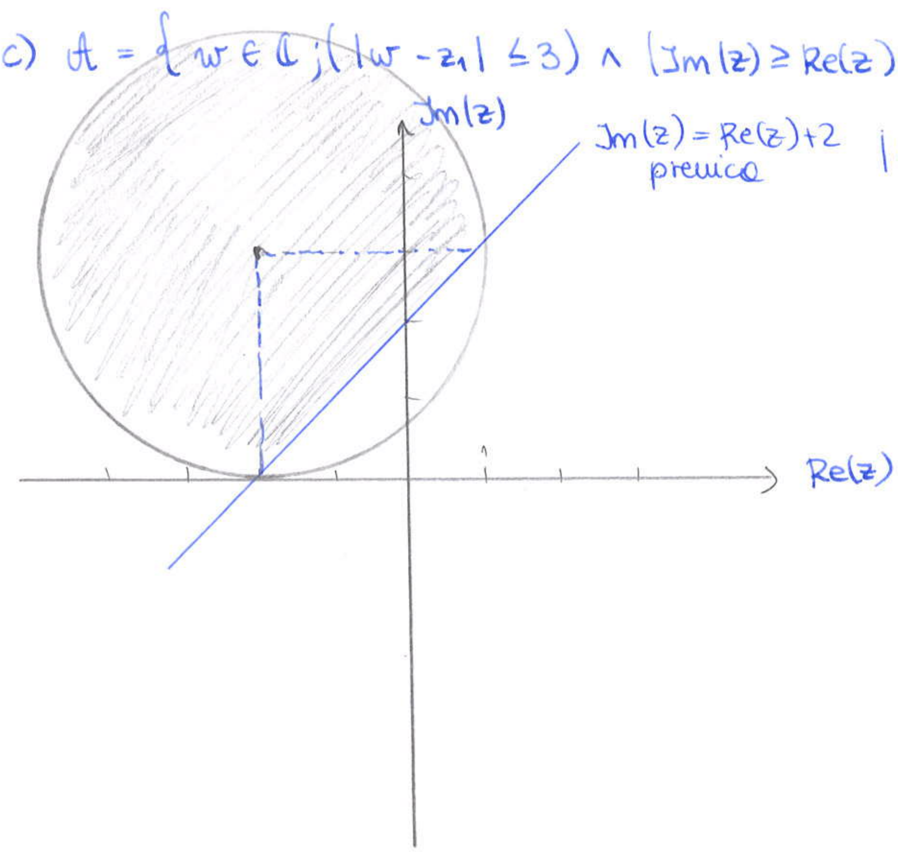
$(x^2+4x+4+9)(x-2) = 0$

$(x^2+4x+13)(x-2) = 0$

$x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 13x - 26 = 0$

$x^3 + 2x^2 + 5x - 26 = 0$ $\boxed{a = 2 \quad b = 5 \quad c = -26}$ REŠITEV

c) $A = \{w \in \mathbb{C}; (|w - z_1| \leq 3) \wedge (\operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) + 2)$



$|w - z_1| \leq 3$

krožnica s središčem v z_1 in polmerom 3

$z_1 = -2+3i$

Ploščina območja A

$S_A = S_{KROGA} - S_{odseka}$

$r = 3cm$

$S_{KROGA} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \underline{\underline{9\pi \, cm^2}}$

$S_{odseka} = S_{izseka} - S_\Delta$

imamo $\frac{1}{4}$ kroga : $S_{izseka} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{9\pi}{4} cm^2$

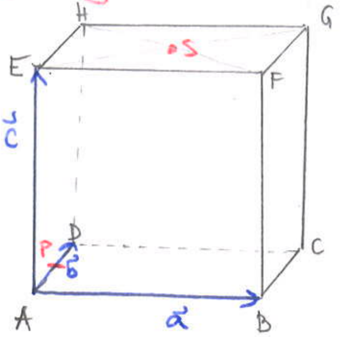
pravokotni Δ,
obe kateti sta 3

$S_\Delta = \frac{ab}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

$$S_A = 9\pi - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}\right)$$

$$= \frac{36\pi - 9\pi + 18}{4} = \frac{27\pi + 18}{4}$$

3. naloga



a) $\vec{BS} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{CP} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$$\vec{BS} \cdot \vec{CP} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a}\vec{a} + \underbrace{\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\substack{= 0 \\ \vec{a}\perp\vec{b}}} - \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b}}_{\substack{= 0 \\ \vec{a}\perp\vec{b}}} - \frac{1}{4}\vec{b}\vec{b} - \underbrace{\vec{a}\vec{c}}_{\substack{= 0 \\ \vec{a}\perp\vec{c}}} - \frac{1}{2}\underbrace{\vec{b}\vec{c}}_{\substack{= 0 \\ \vec{b}\perp\vec{c}}}$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$|\vec{BS}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right)}$$

$$|\vec{BS}| = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}\vec{a} - \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b}}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c}}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b}}_{=0} + \frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{b} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{b}\vec{c}}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{b}\vec{c}}_{=0} + \vec{c}\vec{c}}$$

$$|\vec{BS}| = \sqrt{\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + c^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = a\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{a\frac{\sqrt{6}}{2}}}$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{\left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)}$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b}}_{=0} + \frac{1}{4}\vec{b}\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}$$

$$\vec{BS} \cdot \vec{CP} = |\vec{BS}| \cdot |\vec{CP}| \cdot \cos\alpha$$

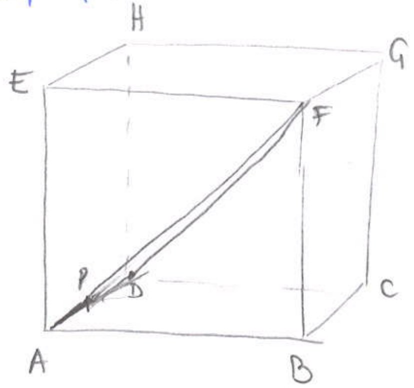
$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \cos\alpha \quad \Big/ \cdot 4$$

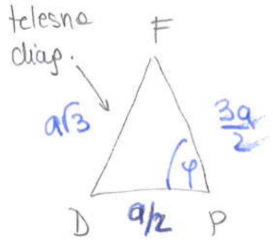
$$a^2 = a^2\sqrt{30}\cos\alpha \quad \Big/ : a^2$$

$$1 = \sqrt{30} \cdot \cos\alpha \quad \Big/ : \sqrt{30}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}} \qquad \underline{\underline{\alpha = 79°29'}}$$

b) D, P, F





telesne diag. kocke $a\sqrt{3}$

$$|PF|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + a^2$$

$$|PF| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$$

največji kot leži nasproti najdaljše stranice $a\sqrt{3}$ (kosinusni izrek)

$$|FD|^2 = |DP|^2 + |FP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |FP| \cdot \cos\varphi$$

$$(a\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{3a}{2}\right) \cdot \cos\varphi$$

$$3a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} - \frac{6a^2}{4} \cdot \cos\varphi \qquad | : a^2$$

$$3 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{6}{4}\cos\varphi \qquad | \cdot 4$$

$$12 = 1 + 9 - 6 \cdot \cos\varphi$$

$$2 = -6\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\varphi = 109° 28'}$$

c) polmer krogle $r = \frac{a}{2}$

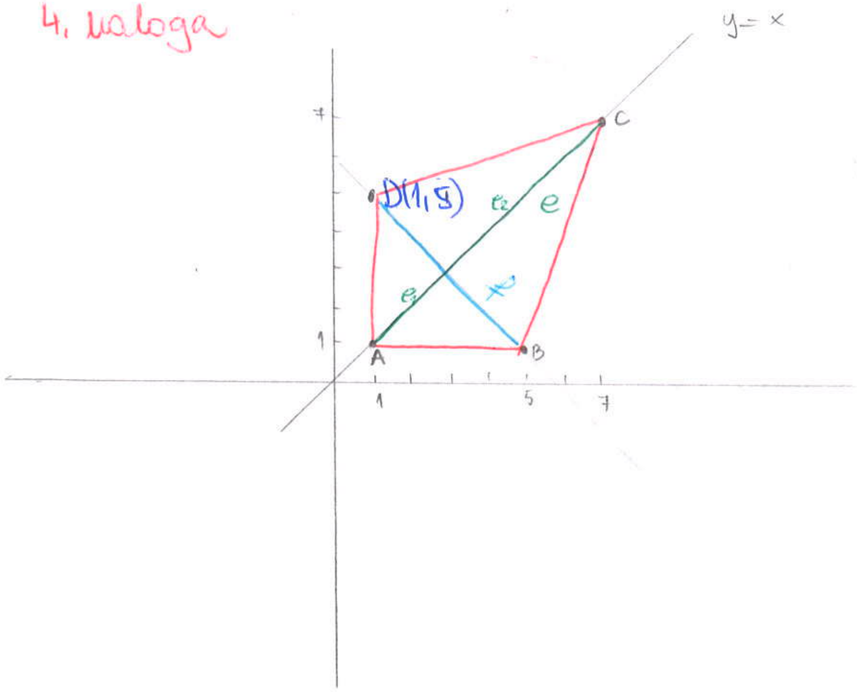
$$V_{KROGLE} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} = \frac{4\pi \cdot \frac{a^3}{8}}{3} = \frac{4\pi a^3}{3 \cdot 8} = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$V_{KOCKE} = a^3$$

$$\frac{V_{KROGL.}}{V_{KOCKE}} = \frac{\frac{\pi a^3}{6}}{a^3} = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \Rightarrow 52{,}36\,\%$$

$$\underline{100\% - 52{,}36\% = 47{,}64\%}$$

4. naloga



$A(1,1)$

$B(5,1)$

$C(7,7)$

očrtana krožnica točkam A, B, C

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

A: $(1-p)^2 + (1-q)^2 = r^2$

$$1 - 2p + p^2 + 1 - 2q + q^2 = r^2$$

B: $(5-p)^2 + (1-q)^2 = r^2$

$$25 - 10p + p^2 + 1 - 2q + q^2 = r^2$$

– odštejemo

$$-24 + 8p = 0$$
$$8p = 24$$
$$p = 3$$

C: $(7-p)^2 + (7-q)^2 = r^2$

$$49 - 14p + p^2 + 49 - 14q + q^2 = r^2$$

– odštejemo

$$-24 + 4p - 48 + 12q = 0$$ vstavim $p=3$

$$-24 + 12 - 48 + 12q = 0$$
$$12q = 60$$
$$q = 5$$

vstavim v eno od enačb za r

$$1 - 2p + p^2 + 1 - 2q + q^2 = r^2$$
$$1 - 6 + 9 + 1 - 10 + 25 = r^2$$
$$r^2 = 20 \qquad r = 2\sqrt{5}$$

KROŽNICA

$$\boxed{(x-3)^2 + (y-5)^2 = 20}$$

b) ploščina 4-kotnika ABCD

razdelim na 2 simetrična Δ : ΔABC in ΔACD
zato izračunam samo ploščino ΔABC

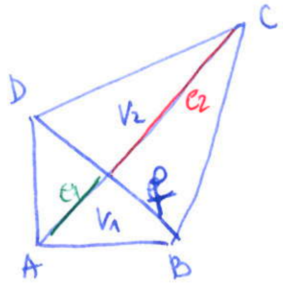
$$S_\Delta = \frac{1}{2} \sigma \cdot \left| (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right|$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left| (5-1)(7-1) - (7-1) \cdot (1-1) \right|$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| 4 \cdot 6 \right| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

$$S_{ABCD} = 2 S_\Delta = 2 \cdot 12 = \underline{24}$$

c) ko zavrtimo dobimo 2 stožca



$e_1 + e_2 = e$

stožec $V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$

V_1 $\quad r = \frac{f}{2}$ $\quad v = e_1$

$$V_1 = \frac{\pi \left(\frac{f}{2}\right)^2 \cdot e_1}{3} = \frac{\pi \cdot \frac{f^2}{4} \cdot e_1}{3} = \frac{\pi f^2 \cdot e_1}{12}$$

V_2 $\quad r = \frac{f}{2}$ $\quad v = e_2$

$$V_2 = \frac{\pi \left(\frac{f}{2}\right)^2 e_2}{3} = \frac{\pi \frac{f^2}{4} e_2}{3} = \frac{\pi f^2 e_2}{12}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi f^2 \cdot e_1}{12} + \frac{\pi f^2 e_2}{12}$$

$$= \frac{\pi f^2}{12} (e_1 + e_2) = \underline{\underline{\frac{\pi f^2 \cdot e}{12}}}$$

d) vsota kvadratov razdalj $|AT|$ in $|CT|$ je minimalna
T točka na abs. osi
$T(x, 0)$, $A(1,1)$, $C(7,7)$

$$|AT| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1^2}$$

$$|CT| = \sqrt{(x-7)^2 + 7^2}$$

$$\underbrace{|AT|^2 + |CT|^2}_{\text{vsota kvadratov razdalj}} = \left(\sqrt{(x-1)^2 + 1}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-7)^2 + 7^2}\right)^2 = (x-1)^2 + 1 + (x-7)^2 + 7^2$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 1 + x^2 - 14x + 49 + 49 = 2x^2 - 16x + 100$$

ker želimo, da je vsota kvadratov minimalna, moramo ta izraz odvajati

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 100$$

$$f'(x) = 4x - 16$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 16 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

$$\boxed{T(4,0)}$$