Splošna matura

Matematika osnovna raven

27.08.2018

1/22

1. S katerim izmed števil

2, 3, 4, 5, 6, 8 in **9** je deljivo

število

10203040506 0

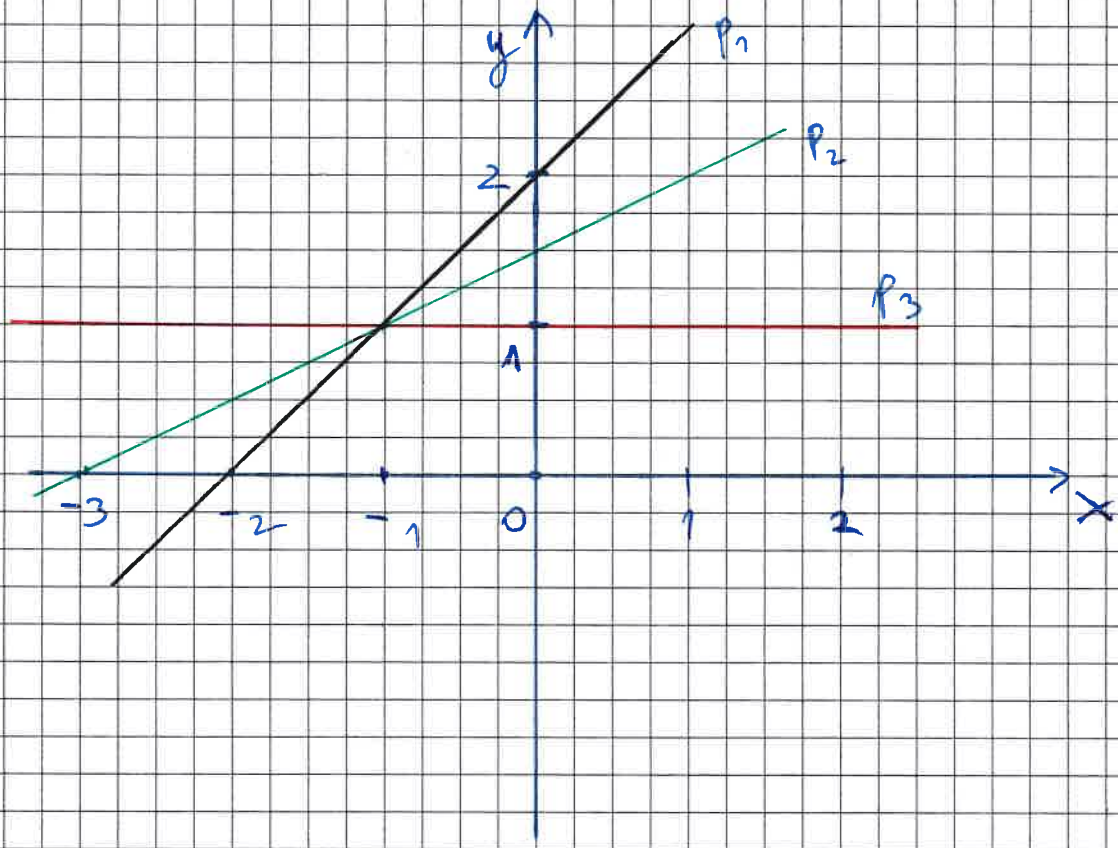
V preglednici obkrožite pravilne odgovore.

Število 10203040506 0 je deljivo:

Z	**2**	(DA)	NE
S	**3**	(DA)	NE
S	**4**	(DA)	NE
S	**5**	(DA)	NE
S	**6**	(DA)	NE
Z	**8**	DA	(NE)
Z	**9**	DA	(NE)

(7 točk)

2. Na sliki so narisane premice p_1, p_2 in p_3



2.1. Zapišite enačbe premic p_1, p_2 in p_3. (4 točke)

2.2. Zapišite element množice (1 točka)

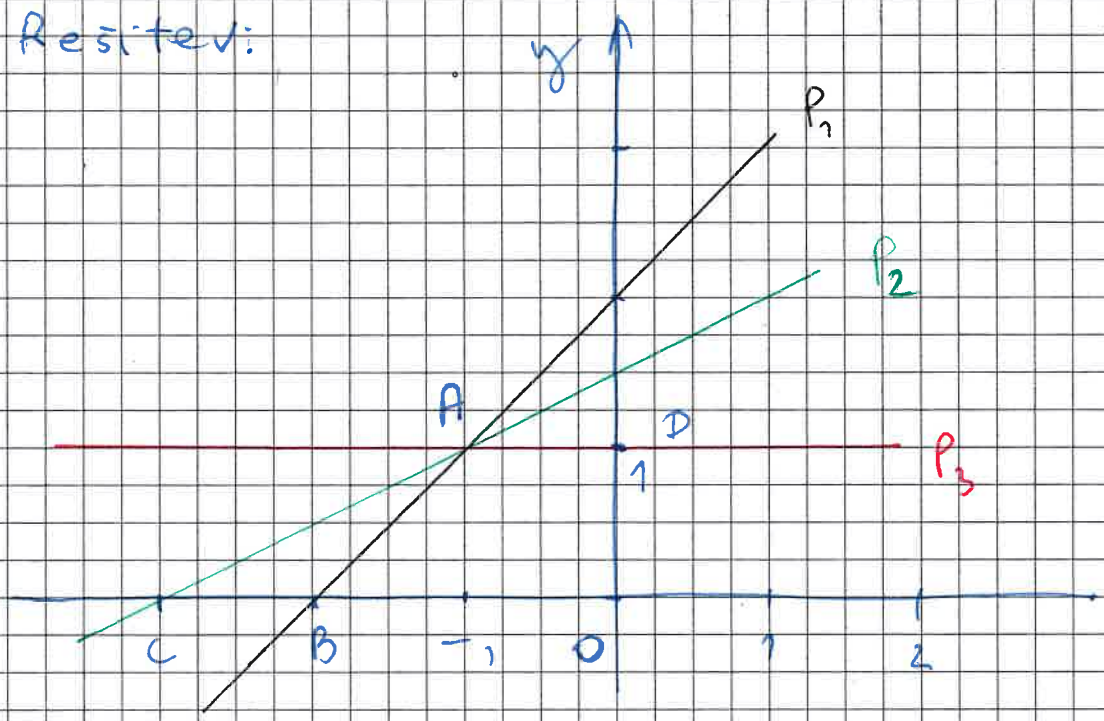
$$p_1 \cap p_2 \cap p_3$$

2.3. Izračunajte ploščino štirikotnika z oglišči $(-2,0)$; $(-1,0)$; $(0,1)$ in $(0,2)$. (2 točki)

(7 točk)

Rešitev:

3/22



A(-1, 1) B(-2, 0) C(-3, 0) D(0, 1)

premica p_1: $k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{-2-(-1)}$

$k = \frac{-1}{-1} = 1$

$y - y_A = k_1(x - x_A)$

$y - 1 = 1(x - (-1))$

$y - 1 = x + 1$

p_1: $y = x + 2$

premica p_2

$k_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0-1}{-3-(-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$y - y_A = k_2(x - x_A)$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - (-1))$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$p_2 : \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Premica p_3

$$k_3 = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{1 - 1}{0 - (-1)} = 0$$

$$y - y_A = k_3(x - x_A)$$

$$y - 1 = 0(x - (-1))$$

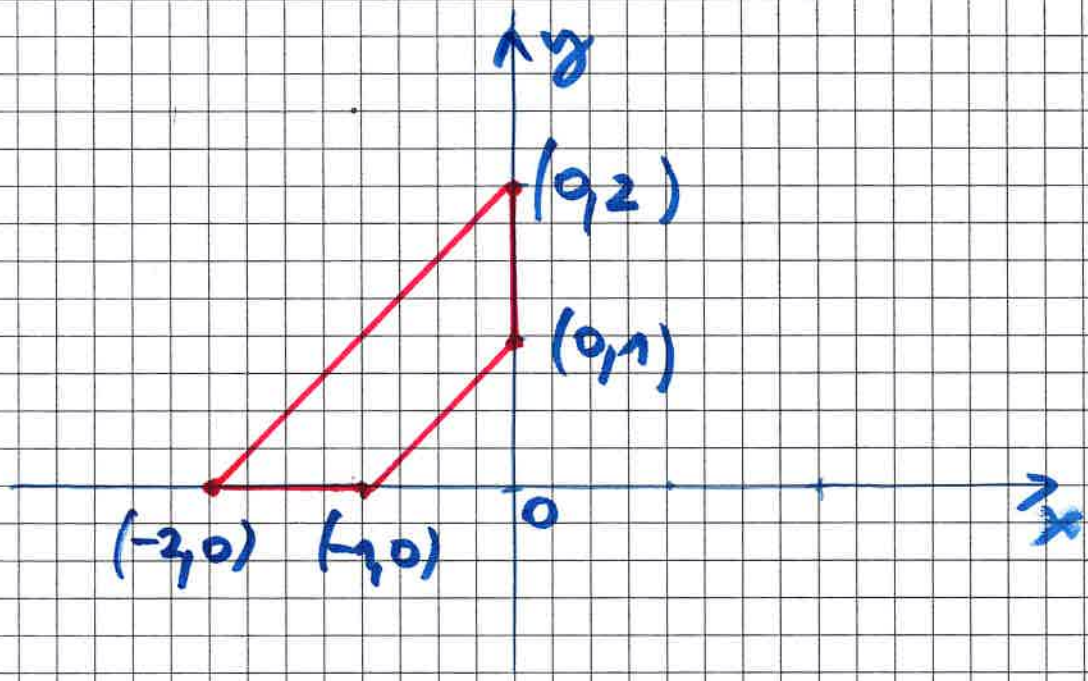
$$y - 1 = 0$$

$$p_3 : \quad y = 1$$

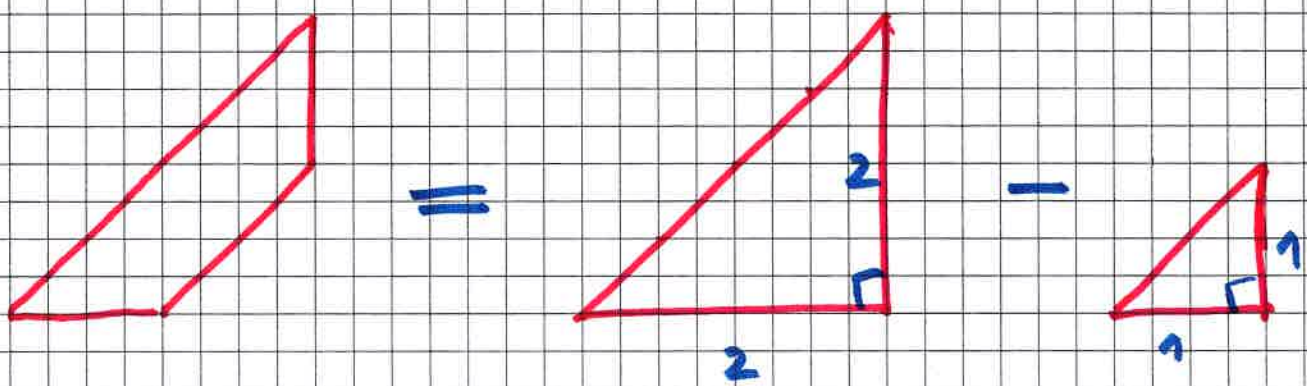
Skupna točka vseh treh premic je točka $A(-1, 1)$

$$p_1 \cap p_2 \cap p_3 = A(-1, 1)$$

5/22



Ploščina štirikotnika je enaka razliki ploščin dveh trikotnikov.

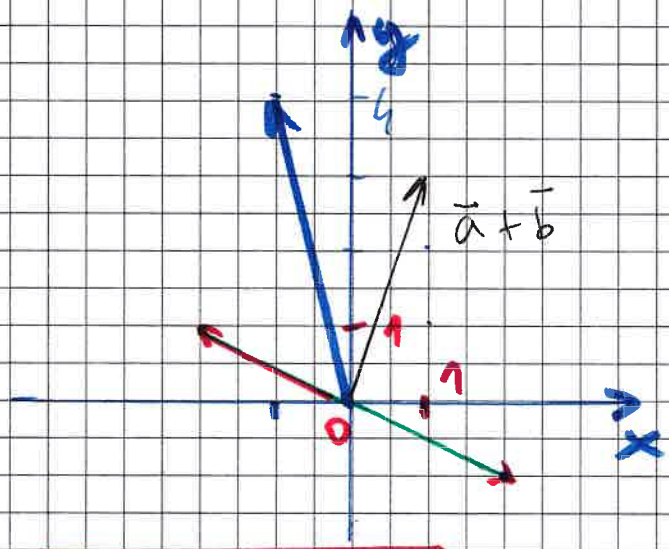


$$S_4 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$S_4 = \frac{3}{2} = 1,5$$

3. V spodnji koordinatni sistem nariši te vektorje $\vec{a} = (2, -1)$ in $\vec{b} = (-1, 4)$, nasprotni vektor vektorja $\vec{a}$, ter vsoto vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Izračunaj te dolžino najdaljšega izmed teh štirih vektorjev (+ točk)

Rešitev:



$\bar{a} = (2, -1)$

$\bar{b} = (-1, 4)$

$-\bar{a} = (-2; +1)$

$\bar{a} + \bar{b} = (2, -1) + (-1, 4)$

$= (1; 3)$

$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{(2,-1)(2,-1)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2,24$

$|\bar{b}| = \sqrt{(-1,4)\cdot(-1,4)} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} = 4,12$

$|-\bar{a}| = |\bar{a}| = \sqrt{5} = 2,24$

$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(1,3)\cdot(1,3)} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Najdaljši je vektor $|\bar{b}| = \sqrt{17} = 4,12$

4. Brez uporabe računala poiščite vse rešitve enačb

4/22

4.1. $x^2+2x+2=0$ (2 točki)

4.2 $2\sin x+1=0$ (2 točki)

4.3. $\tan x+1=0$ (1 točka)

4.4. $x^2=4$ (1 točka)

(6 točk)

Rešitev:

4.1. $D=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4$

$\sqrt{D}=\sqrt{-4}=2i$

$x_{1/2}=\frac{-2\pm2i}{2\cdot1}$

$x_1=-1-i$

$x_2=-1+i$

4.2. $2\sin x+1=0 \quad \sin x=-\frac{1}{2}$

$x_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k2\pi=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$

$x_2=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k2\pi=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$

$k\in\mathbb{Z}$

4.3 $\tan x=-1$

$x=\arctan(-1)+k\pi=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

$k\in\mathbb{Z}$

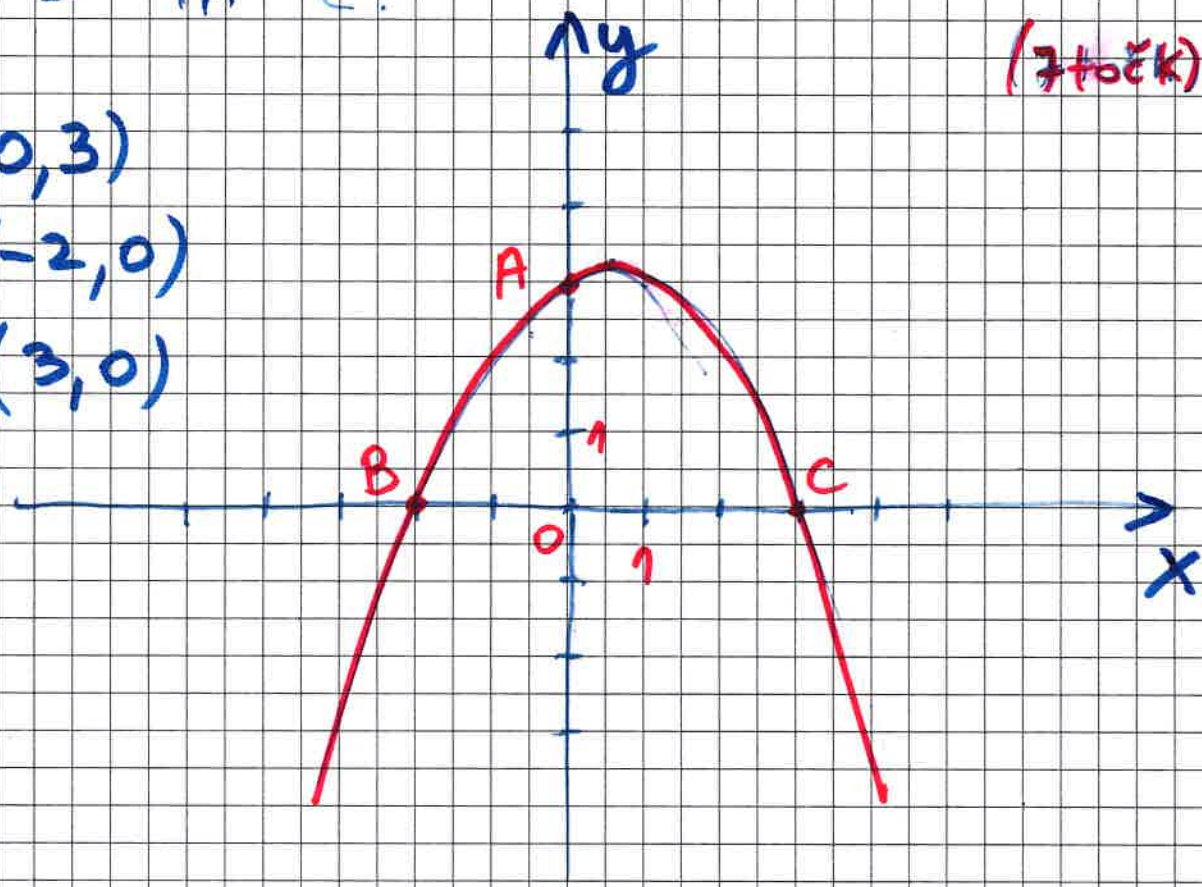
4.4. $x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=2$

$x_2=-2$

5. Na sliki je graf kvadratne funkcije f, ki poteka skozi točke A, B in C. (7 točk)

A(0,3)
B(-2,0)
C(3,0)



5.1 Zapišite predpis funkcije f. (3 točke)

5.2. Izračunajte koordinate temena grafa funkcije f. (2 točki)

5.3. V natanko kolikor točkah se sekata graf funkcije f in premica z enačbo $y=0$? (1 točka)

5.4. Poiščite vse vrednosti parametra $m \in \mathbb{R}$, za katere se graf funkcije f in premica z enačbe $y=m$ sekata v dveh različnih točkah: (1 točka)

9/22

Rešitev:

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x+2)\cdot(x-3)$

$3 = a(0+2)(0-3)$

$3 = -6a$

$a = -\frac{1}{2}$

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{8} = 3,5$$

Teme $T\left(\frac{1}{2}; \frac{25}{8}\right)$

Graf seka x os (premica $y = 0$) v dveh točkah B in C. B(-2,0) C(3,0)

Vse vodoravne premice ki ležijo pod temenom sekajo graf dvakrat.

$y = m$

$m < 2$

$m < \frac{25}{8}$

10/22

6. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \frac{6x}{x^2-4}$. Zapišite ničlo, pola in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f. Izračunajte odvod funkcije f. Narišite graf funkcije f v dani koordinatni sistem.

(8 točk)

Rešitev:

Ničla: $6x = 0$ $\quad x = 0$

Pol: $x^2 - 4 = 0$ $\quad x_1 = -2$, $x_2 = +2$

Vodoravna asimptota $\quad y = 0$

$$f'(x) = \frac{(6x)'(x^2-4) - (6x)\cdot(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{6(x^2-4) - (6x)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{6x^2 - 24 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 - 24}{(x^2-4)^2}$$

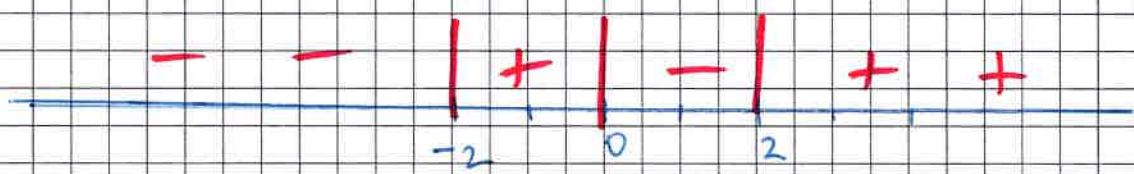
11/22

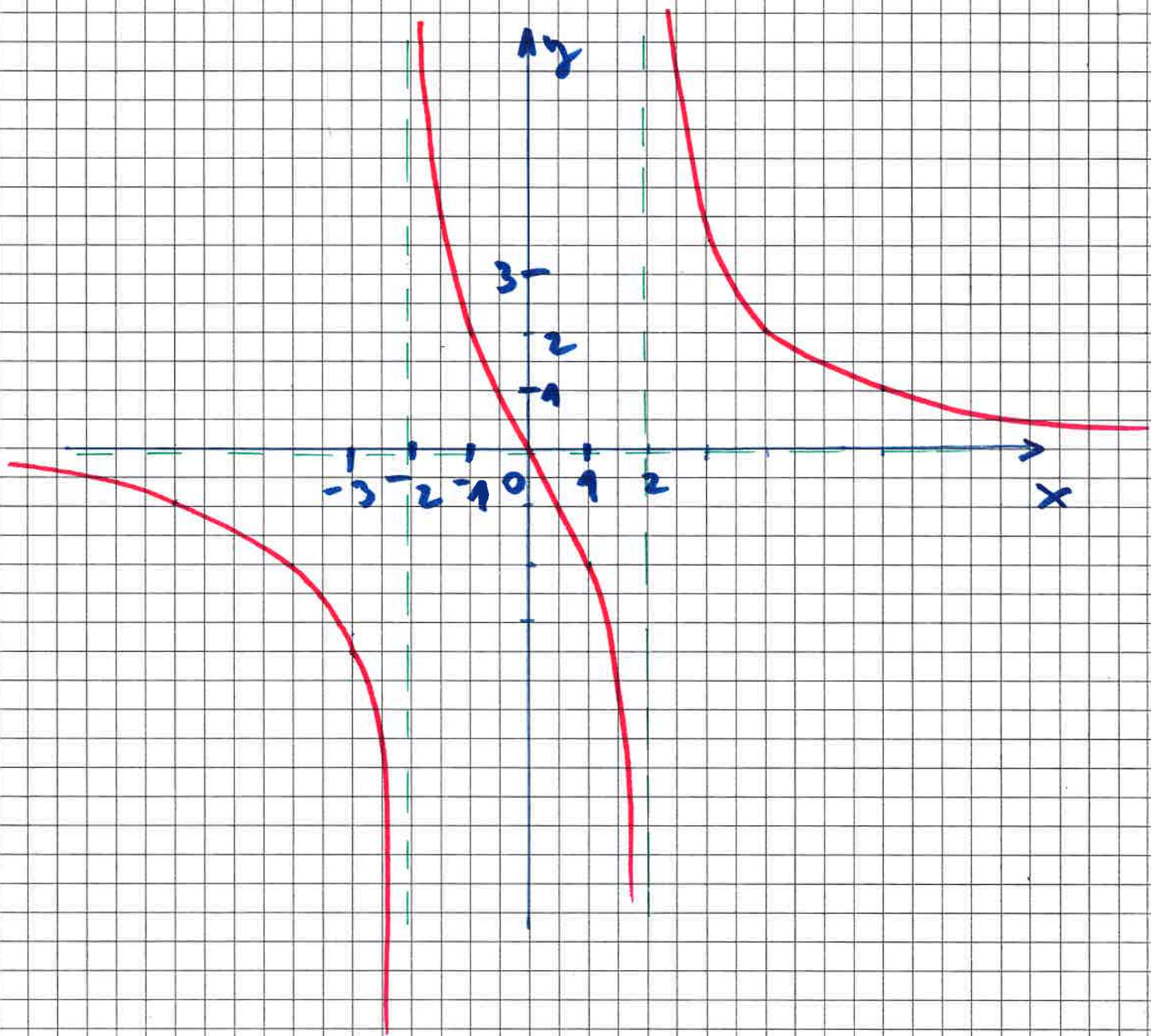
$f'(x) = 0$ $\quad -6x^2 - 24 = 0 \quad / : (-6)$

$x^2 + 4 = 0$

Ni resitve.

Stacionarnih tock ni.





7. Imamo dve prazni cisterni, ki imata obliko valja in stojita na osnovnih ploskvah. **(6 točk)**

7.1. Prva cisterna ima obliko pokončnega valja s polmerom **3 dm**. Vanjo nalijemo **120 litrov** jabolčnega soka in jo tako napolnimo do **dveh tretjin**. Izračunajte višino cisterne. Rezultat zaokrožite na desetinko decimetra. **(3 točke)**

7.2. Druga cisterna ima obliko enakostraničnega valja (osni presek je kvadrat). Vanjo nalijemo **120 litrov** jabolčnega soka in jo tako napolnimo do vrha. Izračunajte polmer cisterne. Rezultat zaokrožite na desetinko decimetra. **(3 točke)**

13/22

Rešitev:

$V_s = 120 \text{ litrov} = 120 \text{ dm}^3$

$V_s = \pi R_1^2 \cdot h_s$

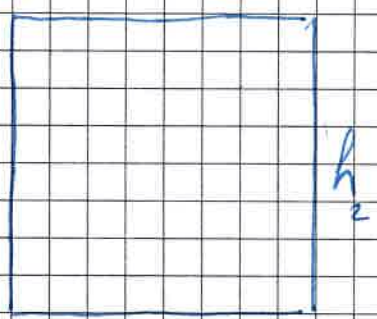
$h_s = \frac{V_s}{\pi R_1^2} = \frac{120}{\pi \cdot 3^2}$

$h_s = 4{,}24 \text{ dm}$

$h_s = \frac{2}{3} h_1$

$h_1 = \frac{3 h_s}{2} = \frac{3 \cdot 4{,}24}{2}$

$h_1 = 6{,}4 \text{ dm}$



$V_2 = \pi R_2^2 \cdot h_2 = 120$

$\pi \cdot R_2^2 \cdot 2R_2 = 120$

$2\pi R_2^3 = 120 \quad / : (2\pi)$

$R_2^3 = \frac{120}{2\pi}$

$R_2 = \sqrt[3]{\frac{120}{2 \cdot \pi}} =$

$R_2 = 2{,}7 \text{ dm}$

14/22

8. Dani sta funkciji $f(x) = 2\log_3(3x-1)-1$ in $g(x) = 2\log_3(x-1)+3$. Izračunajte koordinati presečišča grafov funkcij f in g. Presečišče zapišite.

(6 točk)

Rešitev:

$$2\log_3(3x-1)-1 = 2\log_3(x-1)+3$$

$$2\log_3(3x-1) - 2\log_3(x-1) = 4 \quad /:2$$

$$\log_3(3x-1) - \log_3(x-1) = 2$$

$$\log_3\left(\frac{3x-1}{x-1}\right) = 2$$

$$\frac{3x-1}{x-1} = 3^2 = 9 \quad /\cdot(x-1)$$

$$3x-1 = 9x-9$$

$$9-1 = 9x-3x$$

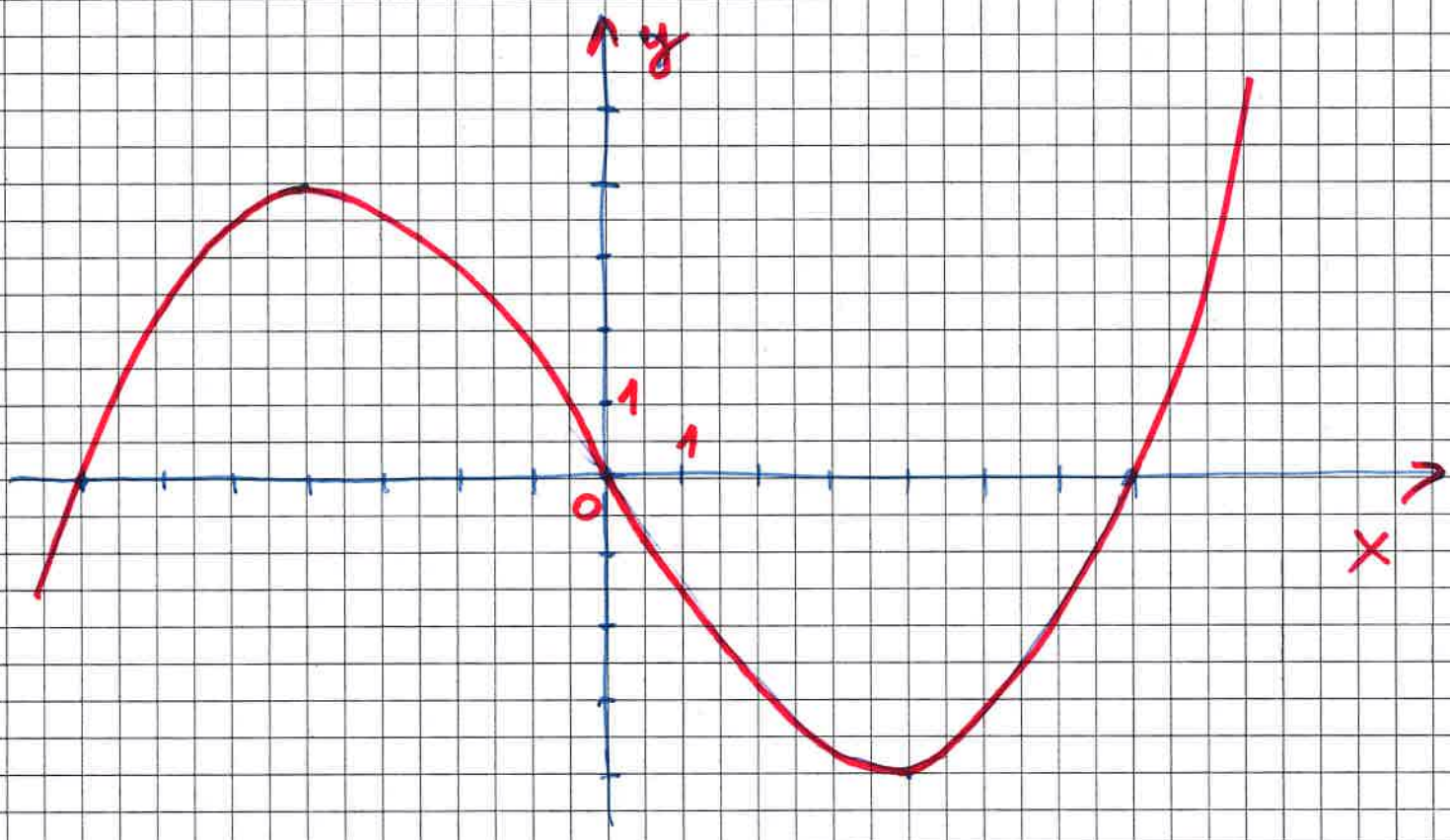
$$6x = 8 \qquad x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$y = 2\log_3\left(3\cdot\frac{4}{3}-1\right)+1 = 2\log_3(3)+1$$

$y = 2\cdot 1+1 = 1$ Presečišče je $P\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

15/22

9. Na sliki je graf lihe funkcije, ki je polinom 3. stopnje. Lokalna ekstrema ima v $x_1 = -4$ in $x_2 = +4$. V spodnji preglednici označite, ali je vrednost v prvem stolpcu pozitivna ali negativna ali enaka nič. (Glejte rešen primer v prvi vrstici.)



(6 točk)

16/22

Vrednost			
$f(4)$	negativna	enaka nič	pozitivna
$f(0)$	negativna	enaka nič	pozitivna
$f'(6)$	negativna	enaka nič	pozitivna
$f'(-4)$	negativna	enaka nič	pozitivna
$\frac{f(2)-f(0)}{2}$	negativna	enaka nič	pozitivna
$\int_0^6 f(x)\,dx$	negativna	enaka nič	pozitivna
$\int_{-4}^{+4} f(x)\,dx$	negativna	enaka nič	pozitivna

17/22

10. V 4.e razredu je 30 dijakov. Fizikalni krožek obiskuje 16 dijakov, astronomski krožek pa 18 dijakov tega razreda. Dva dijaka 4.e ne obiskujeta nobenega od teh dveh krožkov. (7 točk)

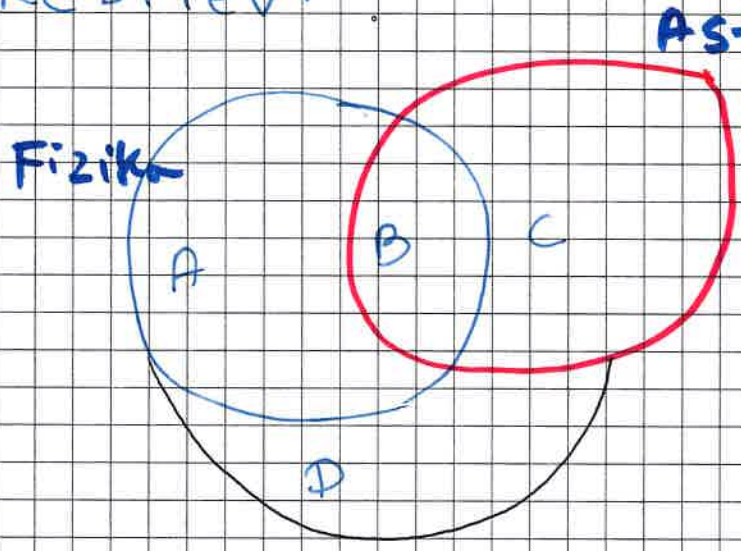
10.1. Koliko dijakov 4e obiskuje fizikalni in astronomski krožek? Zapišite odgovor. (2 točki)

10.2. Izračunajte verjetnost dogodka A, da naključno izbran dijak 4e obiskuje astronomski krožek in ne obiskuje fizikalnega. (2 točki)

10.3. Izračunajte verjetnost dogodka B, da med tremi naključno izbranimi dijaki 4e vsaj eden obiskuje fizikalni krožek. (3 točke)

18/22

Rešitev:



$A + B + C + D = 30$

$A + B = 16$

$B + C = 18$

$D = 2$

$A + 18 + 2 = 30$

$A = 10$

$B = 16 - A = 6$

Šest dijakov obiskuje oba krožka fizikalni in astronomski.

$$P(A) = \frac{C}{30} = \frac{12}{30} \qquad P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\%$$

$$P(\text{VSAJ EDEN}) = 1 - P(\text{NITI EDEN})$$

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{16}{0}\binom{14}{3}}{\binom{30}{3}} = 1 - \frac{364}{4060}$$

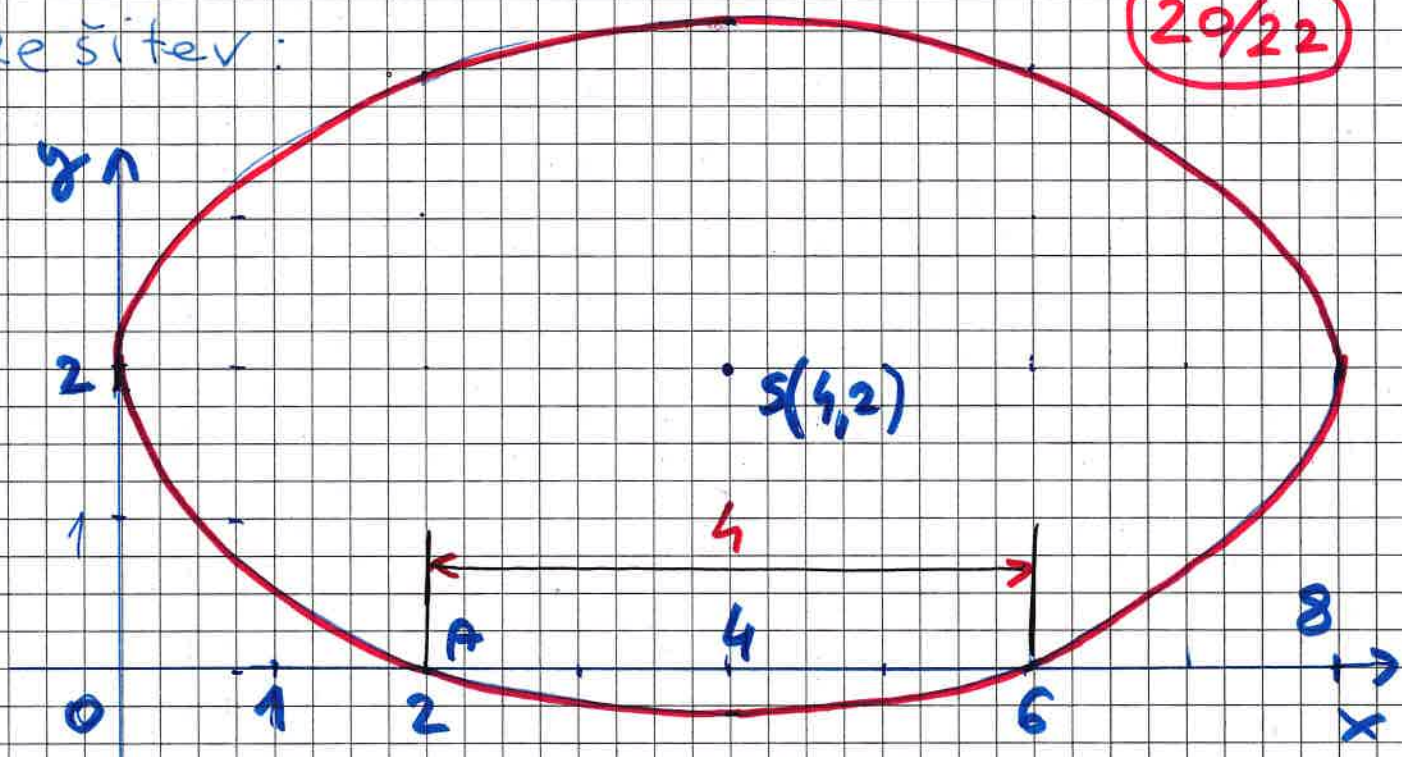
$$P(B) = \frac{132}{145} = 991 = 91\%$$

19/22

11. Elipsa s središčem v točki S(4,2) se dotika ordinatne osi (ima z navpično osjo natanko eno skupno točko), na abscisni osi pa odreže daljico dolžine 4. Izračunajte polosi elipse in zapišite njeno enačbo. Narišite skico. Rezultati naj bodo točni. (7 točk)

20/22

Rešitev:



$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

$a = 4$, Točka $A(2,0)$ leži na elipsi:

$$\frac{(x-4)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(2-4)^2}{16} + \frac{(0-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad / \cdot 4b^2$$

$$b^2 + 16 = 4b^2 \qquad b^2 = \frac{16}{3}$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

$$(x-4)^2 + 3(y-2)^2 = 16$$

21/22

12. Osnovna ploskev pokončne piramide s prostornino $\frac{27}{4}$ cm^3 je pravokotnik s stranicama dolžin a in b. Dolžino višine te piramide označimo z v. Števila a, b in v v tem vrstnem redu tvorijo naraščajoče aritmetično zaporedje z diferenco $\frac{3}{2}$. Izračunajte dolžine osnovnih robov in višino piramide.

(6 točk)

22/22

Rešitev:

$a = x - \frac{3}{2}$

$b = x$

$c = x + \frac{3}{2}$

$V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot v = \frac{27}{4}$

$\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)(x)\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} \quad / \cdot 12$

$4\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot(x)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 3 \cdot 27$

$4\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\cdot(x) = 81$

$4x^3 - 9x - 81 = 0$

	4	0	−9	−81
3		12	36	81
	4	12	27	0

$D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 27 = -288$

$x = 3$

$a = 3 - \frac{3}{2}$ $\qquad$ $a = 1{,}5\ cm$

$b = 3$ $\qquad$ $b = 3\ cm$

$v = 3 + \frac{3}{2}$ $\qquad$ $v = 4{,}5\ cm$